Álgebra y Geometría I
Prof. Ignacio Huerta
Ay. Gary Martínez

UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

Ayudantía 5

Problema 1. Calcule las siguientes sumatorias:

a) $\sum_{k=0}^{n} k \cdot k!$

b) $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\sqrt{k(k+1)}\right)\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)}$

Solución:

a)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! &= \sum_{k=0}^{n} (k+1-1) \cdot k! \\
&= \sum_{k=0}^{n} [(k+1) \cdot k! - k!] \\
&= \sum_{k=0}^{n} [(k+1)! - k!] \\
&= (n+1)! - 1
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln(k)] \\
&= \ln(n+1)
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\sqrt{k(k+1)}\right)\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)} &= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{\left(\sqrt{k(k+1)}\right)\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)} \cdot \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right] \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}
\end{aligned}$$

Problema 2. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ 133 divide a $11^{n+2} + 12^{2n+1}$.

Solución: Procederemos por inducción. Cuando $n = 1$ se tiene $11^3 + 12^3 = 1331 + 1728 = 3059 = 13 \cdot 23$. Esto prueba que 133 divide a $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ cuando $n = 1$, y por lo tanto se tiene el caso base. Ahora supongamos que el enunciado es cierto para $n > 1$, es decir, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133m.$$

Probemos que es cierto para $n + 1$.

$$\begin{aligned}
11^{(n+1)+2} + 12^{2(n+1)+1} &= 11 \cdot 11^{n+2} + 12^2 \cdot 12^{2n+1} \\
&= 11 \cdot 11^{n+2} + 144 \cdot 12^{2n+1} \\
&= 11 \cdot 11^{n+2} + (133 + 11) \cdot 12^{2n+1} \\
&= 11 \cdot 11^{n+2} + 11 \cdot 12^{2n+1} + 133 \cdot 12^{2n+1} \\
&= 11 \cdot (11^{n+2} + 12^{2n+1}) + 133 \cdot 12^{2n+1}.
\end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción se tiene $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133m$, entonces

$$\begin{aligned}
11^{(n+1)+2} + 12^{2(n+1)+1} &= 11 \cdot (11^{n+2} + 12^{2n+1}) + 133 \cdot 12^{2n+1} \\
&= 11 \cdot 133m + 133 \cdot 12^{2n+1} \\
&= 133(11m + 12^{2n+1}).
\end{aligned}$$

Esto prueba la tesis de inducción, pues $11m + 12^{2n+1} \in \mathbb{N}$, y por tanto se concluye que para todo $n \in \mathbb{N}$ 133 divide a $11^{n+1} + 12^{2n+1}$.

Problema 3. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+i} \leq \frac{5}{6}.$$

Solución: Se procederá por inducción en n. Cuando $n = 1$, se tiene

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \leq \frac{5}{6}.$$

Entonces se tiene el caso base. Supongamos que es cierto para $n > 1$, es decir,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+i} \leq \frac{5}{6}.$$

Probemos que es cierto para $n+1$. Primero veamos que tenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{(n+1)+1} \frac{1}{(n+1)+i} &= \sum_{i=2}^{n+3} \frac{1}{n+i} \\
&= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{n+i} \\
&= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \right) + \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{n+i} \\
&= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{n+1} + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+i}.
\end{aligned}$$

Por otra parte, como $2n+2 < 2n+3$ se tiene que $\dfrac{1}{2n+3} < \dfrac{1}{2n+2}$. De esta forma se tiene la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{n+1}$$

y por tanto

$$\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{n+1} < 0.$$

Esto implica que

$$\sum_{i=1}^{(n+1)+1} \frac{1}{(n+1)+i} < \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+i}.$$

Finalmente, por hipótesis de inducción se concluye que

$$\sum_{i=1}^{(n+1)+1} \frac{1}{(n+1)+i} < \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+i} \leq \frac{5}{6}.$$

Es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+i} \leq \frac{5}{6}$$

No olviden concluir