Álgebra y Geometría I
Prof. Ignacio Huerta
Ay. Gary Martínez

UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

Ayudantía 2

Problema 1. ¿Qué tan grande es $\mathbb{Z}$ con respecto a $\mathbb{N}$? ¿Y $\mathbb{Q}$ con respecto a $\mathbb{N}$? ¿Y $\mathbb{R}$ con respecto $\mathbb{N}$?

$f : X \to X$

Problema 2. Sea X un conjunto. Pruebe que X es finito sí y sólo si se tiene la equivalencia f inyectiva $\Leftrightarrow$ f sobreyectiva.

Problema 3. Sea $A, B \subset E$ subconjuntos disjuntos. Sea $f : E \to E$ una función. Pruebe que:

a) Probar que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ y que si f es inyectiva, entonces $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

b) Probar que si f es sobreyectiva, entonces $f(A) \cup f(A^c) = E$. Pruebe que no siempre ocurre $f(A) \cap f(A^c) = \emptyset$.

c) Probar que $f^{-1}(f(A^c)) = A^c \Rightarrow f^{-1}(f(A)) = A$.

Problema 1

Una de las cualidades de las funciones es la de poder comparar conjuntos. Podemos decir si un conjunto es más grande que otro o si son iguales. La respuesta a la primera pregunta es que son iguales. Pese a que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ tienen la misma cantidad de elementos y esto se puede probar con la siguiente función.

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$
$$n \to \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Notemos que f es inyectiva. Sean $n, m \in \mathbb{Z}$ tales que $f(n) = f(m)$. Esta igualdad nos dice que tienen el mismo signo. Si $f(n) = f(m)$ es positivo, entonces n y m son impares. Entonces,

$$f(n) = f(m) \Rightarrow \frac{n+1}{2} = \frac{m+1}{2}$$
$$\Rightarrow n+1 = m+1$$
$$\Rightarrow n = m.$$

Lo que prueba que f es inyectiva.

Probemos ahora la sobreyectividad. Sea $m \in \mathbb{Z}$. Debemos probar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = m$. Para ello basta con tomar $n = -2m$ si $m \in \mathbb{Z}^-$ ó $m = 0$ y $n = 2m - 1$ si $m \in \mathbb{Z}^+$. Como f es sobreyectiva e inyectiva, se tiene que f es biyectiva. Esto último nos dice que hay la misma cantidad de naturales que enteros.

Para la segunda pregunta podríamos pensar que ahora sí encontramos un conjunto más grande, pero no es así. Primero veamos que los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tienen los mismos elementos. En efecto y esto es resultado de que la siguiente función es biyectiva:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
$$n \to \left(\frac{a-1}{2}, b \right)$$

(*)

donde $a, b \in \mathbb{N}$ y son tales que $n = a2^b$.

Dado que tenemos una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, y además tenemos una biyección de $\mathbb{N}$ con $\mathbb{Z}$, existe una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(*) Todo número natural se puede escribir únicamente como $a2^b$ donde a es un número impar y b es cualquier natural.

Es decir, existe una función $g: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ que es biyectiva. Que $\mathbb{N}$ sea biyectiva con $\mathbb{Q}$ es consecuencia del siguiente Lema que no probaremos

<u>Lema</u>: (Que no probaremos)

Sea A un conjunto y B un subconjunto de A. Si existe una biyección entre A y $\mathbb{N}$, entonces B es finito o existe una biyeccion con $\mathbb{N}$.

Sabemos que $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ está en biyección con $\mathbb{N}$. Si bien, $\mathbb{Q}$ no es subconjunto de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ la función

$$h: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$
$$\frac{a}{b} \longmapsto (a,b)$$

es una función inyectiva (Considerando a, b sin divisores comunes). Entonces $\mathbb{Q}$ está en biyección con un subconjunto de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ y como no es finito, por el lema, $\mathbb{Q}$ está en biyección con $\mathbb{N}$.

¿Que ocurre con $\mathbb{R}$? No existe una biyección entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}$, pero esto es trabajo para ustedes.

Problema 2)

Probaremos las dos implicancias

$\Rightarrow$) Supongamos que X es finito.

$\Rightarrow$) Si f es inyectiva, entonces Ref(f) tiene la misma cantidad de elementos que X y Rec$(f) \subset X$. Como Rec$(f) \subset X$ y tienen la misma cantidad de elemento entonces

$$\text{Rec}(f) = X$$

y esto implica que f es sobreyectiva

$\Leftarrow$) Si f no es inyectiva, entonces existen $x, y \in X$; con $x \neq y$, tales que $f(x) = f(y)$. Entonces Rec(f) tiene menos elementos que X y por tanto f no es sobreyectiva.

$\Leftarrow$) Supongamos que tenemos la equivalencia

f inyectiva $\Leftrightarrow$ f sobreyectiva.

Supongamos además que X no es finito. Dado que X no es finito podemos tomar puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots \in X$ (¡Tomar $\mathbb{N}$ puntos! ó bien existe una inyección de $\mathbb{N}$ en X).

Denotemos por

$$A = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$$

al conjunto de tales puntos. Definamos la función $h : A \to A$; $x_i \mapsto x_{i+1}$. Con esto definamos la función

$$g : X \longrightarrow X$$
$$x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \notin A \\ h(x) & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

La función g es inyectiva pues por una parte es la identidad cuando $x \notin A$ y $h(x)$ cuando $x \in A$. La función h es inyectiva pero no es sobreyectiva. Entonces g no es sobreyectiva. Lo que contradice que g es inyectiva $\Leftrightarrow$ g sobreyectiva. Entonces X es finito.