Ayudantía I

Problema 1: Pruebe usando tablas de verdad o demostración directa

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}).$$

Sol:

$$
\begin{aligned}
(p \Leftrightarrow q) &\Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \\
&\Leftrightarrow (\bar{p} \vee q) \wedge (\bar{q} \vee p) \\
&\Leftrightarrow \{(\bar{p} \vee q) \wedge \bar{q}\} \vee \{(\bar{p} \vee q) \wedge p\} \\
&\Leftrightarrow \{(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee \underbrace{(q \wedge \bar{q})}_{F}\} \vee \{\underbrace{(\bar{p} \wedge p)}_{F} \vee (q \wedge p)\} \\
&\Leftrightarrow \{(\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee F\} \vee \{F \vee (q \wedge p)\} \\
&\Leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q}) \vee (p \wedge q).
\end{aligned}
$$

OBS: La siguiente es una tautología

$$[(p \vee F) \Leftrightarrow p] \Leftrightarrow V.$$

Problema 2 | En una encuesta a 200 estudiantes se encontró que

- 68 se comportan bien.
- 138 son participativos.
- 160 son habladores.
- 120 son habladores y participativos
- 20 se comportan bien y no son participativos
- 13 se comportan bien y no son habladores
- 15 se comportan bien y son habladores, pero no son participativos

¿Cuántos de los 200 estudiantes entrevistados no se comportan bien, son habladores y no son participativos?

Sol: Distingamos los conjuntos.

$$A := \{\text{se comportan bien}\}$$

$$B := \{\text{son participativos}\}$$

$$C := \{\text{son habladores}\}$$

Se pide calcular el tamaño de conjunto $A^c \cap C \cap B^c$ que denotamos por $|A^c \cap C \cap B^c|$.

OBS: $\#(A^c \cap C \cap B^c) = |A^c \cap C \cap B^c|$.

Se nos entrega la siguiente información

- $|A|$
- $|B|$
- $|C|$
- $|B \cap C|$
- $|A \cap B^c|$
- $|A \cap C^c|$
- $|A \cap C \cap B^c|$

Denotemos por $\mathcal{U}$ al conjunto total de estudiantes, que es el conjunto universo de la muestra. Algunas propiedades que usaremos es que si $E \subseteq \mathcal{U}$ (un subconjunto de $\mathcal{U}$) entonces $E \cup E^c = \mathcal{U}$, $E \cap E^c = \emptyset$ y $\mathcal{U} \cap E = E$.

De la Teoría de conjuntos tenemos las siguientes igualdades

$$
\begin{aligned}
C \cap B^c &= \mathcal{U} \cap (C \cap B^c) \\
&= (A \cup A^c) \cap (C \cap B^c) \\
&= \{A \cap (C \cap B^c)\} \cup \{A^c \cap (C \cap B^c)\}
\end{aligned}
$$

De esta forma tenemos que $A^c \cap C \cap B^c$ está contenido en $C \cap B^c$ y lo que falta es $A \cap C \cap B^c$.

Notemos que los conjuntos $A\cap C\cap B^c$ y $A^c\cap C\cap B^c$ son conjuntos disjuntos. En efecto,

$$
\begin{aligned}
(A\cap C\cap B^c)\cap(A^c\cap C\cap B^c) &= A\cap C\cap B^c\cap A^c\cap C\cap B^c \\
&= \underbrace{A\cap A^c}_{=\emptyset}\cap C\cap B^c \\
&= \emptyset\cap C\cap B^c = \emptyset.
\end{aligned}
$$

Así, los conjuntos $A\cap C\cap B^c$ y $A^c\cap C\cap B^c$ son conjuntos disjuntos. Esto implica que

$$|(A\cap C\cap B^c)\cup(A^c\cap C\cap B^c)| = |A\cap C\cap B^c| + |A^c\cap C\cap B^c|$$

y por tanto

$$|C\cap B^c| = |A\cap C\cap B^c| + |A^c\cap C\cap B^c|. \quad (\ast)$$

El tamaño del conjunto $A\cap C\cap B^c$ lo conocemos, por lo que nos faltaría conocer el cardinal de $C\cap B^c$. Notemos la siguiente igualdad de conjuntos

$$C = (C\cap B)\cup(C\cap B^c),$$

además los conjuntos $C\cap B$ y $C\cap B^c$ son disjuntos. Entonces,

$$|C| = |C\cap B| + |C\cap B^c|.$$

Los tamaños $|C|$ y $|C \cap B|$ los conocemos, entonces podemos determinar $|C \cap B^c|$ y en consecuencia $|A^c \cap C \cap B^c|$. Calculémoslo. Evaluando $|C \cap B^c| = |C| - |C \cap B|$ en $(*)$, se obtiene

$$|C| - |C \cap B| - |A \cap C \cap B^c| = |A^c \cap C \cap B^c|$$

De las hipótesis se tiene $|C| = 160$, $|C \cap B| = 120$ y $|A \cap C \cap B^c| = 15$, por lo que se tiene

$$|A^c \cap C \cap B^c| = 160 - 120 - 15 = 25.$$

Problema 3. Verifique si las siguientes son verdaderas o falsas. De ser falsas de un un contraejemplo.

a) $A \subseteq B$ si y sólo si $(A \cap B^c) = \emptyset$

La complejidad de este problema recide en que probar enunciados que pueden ser sencillos por lo intuitivo, no lo son a la hora de probarlos. Usaremos lo que hemos aprendido hasta ahora de lógica y teoría de conjuntos. Que A sea subconjunto de B es equivalente a la frase

$$\forall x \in \mathcal{U}, \; x \in A \Rightarrow x \in B,$$

donde $\mathcal{U}$ denota el conjunto universal. Ahora podemos probar que es cierto.

$$\begin{aligned}
A \subseteq B &\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{U}, \; \underline{x \in A} \Rightarrow x \in B \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{U}, \; \overline{x \in A} \vee x \in B \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{U}, \; x \notin A \vee x \in B \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{U}, \; x \in A^c \vee x \in B \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{U}, \; x \in A^c \cup B \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{U}, \; x \in (A \cap B^c)^c \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{U}, \; x \notin A \cap B^c \\
&\Leftrightarrow A \cap B^c = \emptyset
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

b) Sean A, B dos conjuntos; entonces

- $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
- $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

donde $\mathcal{P}(A)$ denota el conjunto potencia de A.

<u>Sol:</u> El primero es verdadero.

$$
\begin{aligned}
E \in \mathcal{P}(A \cap B) &\iff E \subset A \cap B \\
&\iff E \subset A \wedge E \subset B \\
&\iff E \in \mathcal{P}(A) \wedge E \in \mathcal{P}(B) \\
&\iff E \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).
\end{aligned}
$$

La segunda es falsa, pues si $A = \{0\}$ y $B = \{1\}$ tenemos que $\mathcal{P}(A) = \{\phi, \{0\}\}$, $\mathcal{P}(B) = \{\phi, \{1\}\}$ y $\mathcal{P}(A \cup B) = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$. Claramente se tiene que

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B),$$

pues $\{0,1\} \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. En general,

$$A \cup B \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B).$$

Sin embargo, sí se tiene la propiedad

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$$

Probémoslo.

$$
\begin{aligned}
E \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) &\Leftrightarrow E \in \mathcal{P}(A) \vee E \in \mathcal{P}(B) \\
&\Leftrightarrow E \subset A \vee E \subset B \\
&\boxed{\Rightarrow} E \subseteq A \cup B \\
&\Leftrightarrow E \in \mathcal{P}(A \cup B).
\end{aligned}
$$

Tratemos de ver cuando tendríamos la igualdad

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B).$$

Si esto ocurre, entonces $A \cup B \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ y por tanto $A \cup B \in \mathcal{P}(A) \vee A \cup B \in \mathcal{P}(B)$.
Esto último significa que $A \cup B \subset A$ ó $A \cup B \subset B$, lo que es equivalente a que $B \subset A$ ó $A \subset B$.
Es decir,

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B) \Leftrightarrow A \subset B \text{ ó } B \subset A.$$