Álgebra y Geometría I
Prof. Ignacio Huerta
Ay. Gary Martínez

UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias
Licenciatura en Ciencias Matemáticas

Ayudantía 0

Problema 1. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. De ser falsas modifíquelas para que sean verdaderas:

a) $\forall x \in \mathbb{Z}^+ \, \exists y \in \mathbb{Z} \, ; x < y$ V

b) $\forall x \in \mathbb{Z}^- \, \exists y \in \mathbb{Z} \, ; x \leq y$ V

c) $\forall x \in \mathbb{R}^+ \, \exists n \in \mathbb{N} \, ; nx \geq 1$ V

Problema 2. De un ejemplo donde la recíproca no se cumpla.

$$\exists\, x \in A \, \forall\, y \in B \, ; \, p(x,y) \Rightarrow \forall\, y \in B \, \exists\, x \in A \, ; \, p(x,y)$$

Problema 3. Verifique los valores de verdad de:

a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$

b) $\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow p \wedge \overline{q}$

Problema 4. Si p es primo impar, entonces la ecuación

$$2x^2 + p^2 x + p = 0$$

no tiene solución en los números racionales.

Problema 5.

Problema 2, Queremos encontrar un contra-ejemplo de la recíproca de la afirmación

$$\exists x \in A \ \forall y \in B ; p(x,y) \Rightarrow \forall y \in B \ \exists x \in A ; p(x,y)$$

la cual sería

$$\forall y \in B \ \exists x \in A ; p(x,y) \Rightarrow \exists x \in A \ \forall y \in B ; p(x,y)$$

Para ello debemos encontrar condiciones para que se de la situación

$$V \Rightarrow F$$

⊗ Seríamos pésimos abogados si de datos o hechos verdaderos concluimos mal y nuestro cliente termina preso siendo inocente.

Vamos a considerar

$$A = B = [-1, 1]$$

$$p(x,y) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Notemos que la frase de la izquierda (Hipótesis) queda

$$\forall y \in [-1,1]\ \exists x \in [-1,1];\quad x^2+y^2=1.$$

La cual resulta ser verdadera pues dado $y \in [-1,1]$ se tiene que $x=\sqrt{1-y^2} \in [-1,1]$, además

$$x^2+y^2=\left(\sqrt{1-y^2}\right)^2+y^2 = 1-y^2+y^2 = 1$$

Entonces, para cada $y \in [-1,1]$ podemos encontrar un $x \in [-1,1]$ (que depende de y) tal que $x^2+y^2=1$. Es decir,

$$\forall y \in [-1,1]\ \exists x \in [-1,1];\quad x^2+y^2=1. \iff \text{Verdadera}.$$

Por otro lado, la frase derecha queda

$$\exists x \in [-1,1]\ \forall y \in [-1,1];\quad x^2+y^2=1.$$

Esta frase resulta ser falsa pues si fijamos $x \in [-1,1]$ tenemos la ecuación en y

$$y^2 + x^2 - 1 = 0.$$

Tal ecuación es una ecuación cuadrática y tiene a lo más 2 soluciones (sabemos como son). Entonces, cada vez que fijamos un x la afirmación sólo va a ser cierta para dos valores de $y \in [-1,1]$. Es decir,

$$\forall x \in [-1,1]\ \exists y \in [-1,1] \ ; x^2 + y^2 \neq 1 \Leftrightarrow V$$

Negando en ambos lados

$$\overline{\forall x \in [-1,1]\ \exists y \in [-1,1] \ ; x^2 + y^2 \neq 1} \Leftrightarrow \overline{V}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists x \in [-1,1]\ \forall y \in [-1,1] \ ; x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow F.$$

Por lo tanto, la afirmación derecha es falsa Teniendo así un contraejemplo de la recíproca.

Problema 3, Procederemos mediante tablas de verdad

a)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

b)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\overline{p \Rightarrow q}$	$p \wedge \overline{q}$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

Las demostraciones que se realizan mediante la equivalencia $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ se llaman demostraciones por contrarecíproca y aquellas realizadas mediante la equivalencia $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \bar{q})$ se llaman reducción al absurdo. En las demostraciones por contra-recíproca se niega la Tesis para concluir la negación de la hipótesis, como por ejemplo

"Si el producto de dos enteros es impar, entonces ambos números son impares"

cuya contrarecíproca es

"Si alguno de dos números enteros es par, entonces su producto es par"

Esto se usa para facilitar una demostración. Vea cual de las dos le resulta probar.

En el caso de la reducción al absurdo se mantiene la Hipótesis y se niega la tesis. La idea es llegar a algo falso. Veremos un ejemplo en el problema 4.

Problema 4

¿Probaremos la afirmación tanto como por demostración directa como por reducción al absurdo.

Si p es un primo impar, entonces la ecuación

$$2x^2 + p^2 x + p = 0$$

no tiene solución en los números racionales.

Demostración Directa: Esta consiste en la aplicación directa de la hipotesis sobre algo que ya sabemos cierto. En este caso, sabemos que las soluciones de esta ecuación son de la forma

$$x = \frac{-p^2 \pm \sqrt{p^4 - 8p}}{4}$$

Si queremos que las soluciones estén en los números racionales se debe cumplir que $\sqrt{p^4-8p}$ sea un racional. Esto es equivalente a que p^4-8p sea un cuadrado en $\mathbb{Z}$. Notemos que p divide a p^4-8p ya que podemos factorizar por p.

$$p^4-8p = p(p^3-8)$$

Si $p(p^3-8)$ fuese un cuadrado, entonces p debe dividir a p^3-8. Si esto último ocurre, entonces p divide a 8 y esto no puede ocurrir ya que p es primo impar, *Hipótesis es decir 3, 5, 7 ó algo mayor que 8. Dado que p no divide a p^3-8 se tiene que p^4-8p no es un cuadrado en $\mathbb{Z}$ y por tanto $\sqrt{p^4-8p}$ no es racional, lo que implica que la ecuación $2x^2+p^2x+p=0$ no tiene soluciones racionales.

$\blacksquare$

OBS: Las demostraciones están compuestas por varias demostraciones intermedias. Estas pueden ser por reducción al absurdo, contrarecíproca o de otro tipo. Como ejercicio, identifique que otro tipo de demostraciones fueron usadas en la demostración anterior.

Demostración por Reducción al Absurdo. Esta consiste en sostener la hipótesis y negar la Tesis.

"Sea p un primo impar y supongamos que la ecuación tiene solución en los números racionales" ★

Los numeros racionales son de la forma $\frac{n}{m}$ con $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$ y n, m sin divisores comunes. Si $\frac{n}{m}$ es solución de la ecuación se tiene

$$2\left(\frac{n}{m}\right)^2 + p^2\left(\frac{n}{m}\right) + p = 0$$

Esto es equivalente a

$$2n^2 + p^2 n \cdot m + p m^2 = 0 \qquad (*)$$

Despejando obtenemos

$$p^2 n \cdot m + p m^2 = -2n^2$$

que es equivalente a

$$p(pnm + m^2) = -2n^2$$

Como p es un primo, entonces p divide a 2 ó p divide a n^2. Dado que p es impar, entonces p divide a n^2 y por tanto p divide a n. Esto significa que existe $n' \in \mathbb{Z}$ tal que $n = pn'$. Reemplazando esto en la ecuación $(*)$ tenemos

$$2p^2 n'^2 + p^2 \cdot p n' m + p m^2 = 0 .$$

Simplificando por p obtenemos

$$2pn'^2 + p^2 n' m + m^2 = 0 .$$

Despejando se sigue que

$$2pn'^2 + p^2 n' m = -m^2$$

Factorizando

$$p(2n'^2 + p^2 n' m) = -m^2$$

Por la primalidad de p se tiene que el hecho de que p divida a m^2 implica que p divide a m. Con esto hemos probado que p divide a m y a n al mismo tiempo, pero no tiene divisores comunes. Esto es una contradicción con el hecho de suponer que la ecuación sí tenía soluciones racionales. Finalmente, si p es primo impar, entonces la ecuación

$$2x^2 + p^2 x + p = 0$$

No tiene soluciones racionales.