



1. Recuerdo

1. Decimos que una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ es de *Cauchy* ssi para todo $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{Q}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \epsilon$, para todo $n, m \geq N$. Tomamos a S como el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy.
2. Decimos que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0 cuando $n \rightarrow \infty$ ssi para todo $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{Q}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < \epsilon$, para todo $n \geq N$.
3. Se define en S la relación \sim dada por: $\{a_n\}_n \sim \{b_n\}_n$ (se relacionan) ssi $\{a_n - b_n\}_n$ converge a 0. Resulta que \sim es una relación de equivalencia en S , y definimos el conjunto de clases de equivalencia como $R = \{[\{a_n\}_n] : \{a_n\}_n \in S\}$.

Por ejemplo, la clase $[\{\frac{1}{n}\}]$ con la clase $[\{\frac{1}{2n}\}]$ son iguales, ya que $\{\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\}_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Es decir, $[\{\frac{1}{n}\}]$ y $[\{\frac{1}{2n}\}]$ son el mismo elemento en R . Por otro lado, $[\{\frac{1}{n}\}] \neq [\{\frac{1}{n} + 5\}]$, ya que $\{\frac{1}{n} - (\frac{1}{n} + 5)\}_n$ no converge a 0.

También es importante notar que si $\{a_n\}_n$ no converge a 0, ssi $[\{a_n\}_n] \neq [\{0\}_n]$.

Resulta que R con las siguientes operaciones

$$\begin{aligned} [\{a_n\}_n] + [\{b_n\}_n] &= [\{a_n + b_n\}_n] \\ [\{a_n\}_n] \cdot [\{b_n\}_n] &= [\{a_n b_n\}_n] \end{aligned}$$

es cuerpo. Es fácil ver que las clases $[\{0\}_n]$ y $[\{1\}_n]$ son los neutros aditivo y multiplicativo, respectivamente.

Veamos algunas ideas de como probar que todo $[\{a_n\}_n] \in R$, con $[\{a_n\}_n] \neq [\{0\}_n]$, tiene inverso multiplicativo.

2. Ejercicios

1. Demuestre que si $[\{a_n\}_n] \neq [\{0\}_n]$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \neq 0$, para todo $n > k$.

Solución: Como $[\{a_n\}_n] \neq [\{0\}_n]$, implica que $a_n \not\rightarrow 0$. Es decir, negando la proposición 2 del recuerdo, tendremos que

$$\exists \epsilon_0 > 0, \epsilon_0 \in \mathbb{Q}, \exists k \in \mathbb{N} : n > k \implies |a_n| > \epsilon_0 > 0$$

Esto nos dice que para $n > k$, $a_n \neq 0$.

2. Demuestre que $x = [\{\frac{1}{2021} - \frac{1}{2021n}\}_n] \neq [\{0\}_n]$. Calcule el inverso multiplicativo de x .

Solución: Note que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{2021} - \frac{1}{2021n}) - 0 = \frac{1}{2021} \neq 0$, por lo que $[\{\frac{1}{2021} + \frac{1}{2021n}\}_n] \neq [\{0\}_n]$.

Por el ejercicio anterior, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2021} - \frac{1}{2021n} \neq 0$, para todo $n > k$. Definimos $y = [\{b_n\}_n]$, donde

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq k \\ \frac{1}{a_n} & \text{si } n > k \end{cases}$$

Debemos mostrar 3 cosas: $\{b_n\}_n$ es Cauchy, $[\{b_n\}_n] \neq [\{0\}_n]$, y que $[\{b_n\}_n] \cdot [\{a_n\}_n] = [\{1\}_n]$.

- Por el ejercicio anterior, ya sabemos que $\exists r > 0, r \in \mathbb{Q}, \exists k \in \mathbb{N} : n > k \implies |a_n| > r$.

Además, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a_m| < \epsilon r^2$, para todo $n, m > N$. Entonces, para todo $n, m > \max\{k, N\}$,

$$|b_n - b_m| = \left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_m} \right| = \left| \frac{a_m - a_n}{a_n a_m} \right| < \frac{\epsilon r^2}{r^2} = \epsilon.$$

Por tanto, $\{b_n\}_n$ es de Cauchy.

- Evidentemente, $[\{b_n\}_n] \neq [\{0\}_n]$, ya que a partir de k (esto es, para $k > n$), $b_n = \frac{1}{a_n} \neq 0$, así que, $b_n \not\rightarrow 0$.
- Note que

$$a_n b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq k \\ 1 & \text{si } n > k \end{cases}$$

Luego, $a_n b_n \rightarrow 1$, es decir, $(a_n b_n - 1) \rightarrow 0$. En consecuencia, $[\{a_n b_n - 1\}_n] = [\{0\}_n]$. Por lo tanto, $x \cdot y = [\{a_n b_n\}_n] = [\{1\}_n]$. Como $[\{1\}_n]$ es el inverso multiplicativo, se tiene que y es el inverso multiplicativo de x .

Tarea: Demuestre que si $[\{a_n\}_n] \neq [\{0\}_n]$, entonces existe $[\{b_n\}_n] \neq [\{0\}_n]$ tal que $[\{a_n\}_n] \cdot [\{b_n\}_n] = [\{1\}_n]$.

3. Defina un orden en R .

Solución: Definiremos primero un orden en S .

Diremos que $\{a_n\}_n > \{0\}_n$, ssi, existe $\epsilon_0 > 0, \epsilon \in \mathbb{Q}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \geq \epsilon_0$, para todo $n \geq k$. Es decir, las sucesiones de Cauchy que a partir de un cierto índice empiezan a tener solo términos positivos, serán las sucesiones mayores a $\{0\}_n$. Definimos entonces

$$\{a_n\}_n \leq \{b_n\}_n \iff \{b_n - a_n\} > 0 \vee \{a_n\}_n = \{b_n\}_n$$

Para mostrar que \leq es un orden en S , se debe comprobar la transitividad y la tricotomía.

Podemos definir un orden \leq' en R de la siguiente forma:

$$[\{a_n\}_n] \leq' [\{b_n\}_n] \iff \{b_n - a_n\}_n > \{0\}_n \vee [\{a_n\}_n] = [\{b_n\}_n]$$

Tarea: Demuestre que \leq' es transitiva y satisface la tricotomía (es decir, si $[\{a_n\}_n] \neq [\{0\}_n]$ entonces $[\{a_n\}_n] \geq' [\{0\}_n] \vee [\{-a_n\}_n] \geq' [\{0\}_n]$).

4. a) Demuestre que la expansión 15-cimal de un $x > 0$, dada por el algoritmo, siempre cumple

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{15^i}$$

Solución: Para $n \in \mathbb{N}$, el algoritmo nos da una sucesión de $a_0, a_1, \dots, a_n \in \{0, 1, \dots, 14\}$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{15^i} + \frac{f_{n+1}}{15^{n+1}}$$

donde $0 \leq f_{n+1} < 1$. Tomando $n \rightarrow \infty$, se tiene $\frac{f_{n+1}}{15^{n+1}} \rightarrow 0$ (ya que, $f_{n+1} < 1$, para cualquier n). Así, $x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{15^i}$.

- b) Demuestre que todo real x con $0 \leq x < 1$ se puede escribir como 15-cimal sin cola de 14 (es decir, sin que $a_j = 14$, para todo j lo suficientemente grande).

Solución: Supongamos por contradicción que existe un real $0 \leq x < 1$ tal que el algoritmo si produce cola de 14. Esto es, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 14$, para todo $n \geq n_0$. Sabemos que

$$x = \frac{a_1}{15} + \frac{a_2}{15^2} + \dots + \frac{a_{n_0-1}}{15^{n_0-1}} + \frac{f_{n_0}}{15^{n_0-1}} \wedge x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{15^i} = \sum_{i=1}^{n_0-1} \frac{a_i}{15^i} + \sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{14}{15^i}$$

Luego

$$\frac{f_{n_0}}{15^{n_0-1}} = \sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{14}{15^i} = \frac{14}{15^{n_0}} \frac{15}{14} = \frac{1}{15^{n_0-1}} \implies f_{n_0} = 1$$

Lo cual es una contradicción, ya que $f_{n_0} < 1$.