



1. Recuerdo...

Ya se ha demostrado que el conjunto de cortaduras de Dedekind \mathcal{D} es un cuerpo completo y ordenado. El objetivo de ahora es demostrar que todos los cuerpos ordenados y completos son isomorfos (es decir, existe un homomorfismo biyectivo que respeta el orden), y como consecuencia directa de esto, se demostrará que $\mathbb{R} \cong \mathcal{D}$.

En clases se demostró que todo cuerpo ordenado F contiene una copia isomorfa de \mathbb{Q} , que llamaremos \mathbb{Q}_F . El isomorfismo mencionado es

$$\phi'_F : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}_F$$

definido $\phi'_F(\frac{n}{m}) = n_F \cdot (m_F)^{-1}$, de donde

$$n_F = \begin{cases} 1_F + \dots + 1_F & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ -(1_F + 1_F + \dots + 1_F) & \text{si } -n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Por tanto, dado 2 cuerpo ordenados, existe $\phi : \mathbb{Q}_F \longrightarrow \mathbb{Q}_G$ definida por $\phi(p_F) = p_G$.

Dado dos cuerpos ordenados y completos; digamos G y F , el isomorfismo (que además es único) buscado es:

$$\Gamma : F \longrightarrow G$$

definido por $\Gamma(r) = \sup\{\phi(p) : p \in \mathbb{Q}_F, p < r\}$.

Ejercicio 1: Demuestre que la función Γ creciente. Es decir, demuestre que:

$$r < t \implies \Gamma(r) \leq \Gamma(t)$$

Solución: Basta con demostrar que $\{\phi(p) : p < r, p \in \mathbb{Q}_F\} \subset \{\phi(p) : p < t, p \in \mathbb{Q}_F\}$, ya el supremo se preserva por contenciones (es decir, si $A \subset B \implies \sup A \leq \sup B$ (¿Por qué?)). Sea $\phi(p) \in \{\phi(p) : p < r, p \in \mathbb{Q}_F\}$. Entonces en particular $p < r$. Pero como $r < t$, por la transitividad de la relación de orden, $p < t$. Es decir, $\phi(p) \in \{\phi(p) : p < t, p \in \mathbb{Q}_F\}$. Luego se tiene la contención.

Aplicando supremo en la contención, concluimos que $\Gamma(r) \leq \Gamma(t)$.

Ejercicio 2: Una sucesión de número racionales $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se dice de Cauchy ssi

$$\forall \epsilon > 0, \text{ con } \epsilon \in \mathbb{Q}, \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \epsilon, \forall n, m \geq N$$

- a. Sea S el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy. Defina una suma y producto sobre este conjunto S . Conjeture un neutro aditivo y un neutro multiplicativo.

Solución: Sean $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in S$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in S$. Definimos

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} + \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} := \{a_n + b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cdot \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} := \{a_n b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Para demostrar que estas operaciones están bien definidas tenemos que demostrar que si: $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in S$ entonces

$$\begin{aligned} \{a_n + b_n\}_{n \in \mathbb{N}} &\in S \\ \{a_n b_n\}_{n \in \mathbb{N}} &\in S \end{aligned}$$

Demostremos la primera pertenencia.

Sea $\epsilon > 0$. Por demostrar que

$$\exists R \in \mathbb{N} : |(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| < \epsilon, \forall n, m \geq R$$

Por hipótesis, tenemos que:

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in S \iff \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}, \forall n, m \geq N$$

$$\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in S \iff \exists M \in \mathbb{N} : |b_n - b_m| < \frac{\epsilon}{2}, \forall n, m \geq M$$

Entonces el R buscado es $R := \max\{N, M\}$. En efecto, si $n, m \geq R$ (y luego $n, m \geq N$ y $n, m \geq M$), se tiene:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| &= |(a_n - a_m) + (b_n - b_m)| \leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Para el producto, note que:

$$|a_nb_n - a_mb_m| = |b_n(a_n - a_m) + a_m(b_n - b_m)| \leq |b_n|(a_n - a_m)| + |a_m||b_n - b_m|$$

y use que toda sucesión de Cauchy es acotada.

El neutro aditivo de S lo definimos simplemente como la sucesión cuyos términos son todos cero; y el neutro multiplicativo como la sucesión cuyos términos son todos el racional 1. \square

- b. Una sucesión $\{a_n\}_n \subset \mathbb{Q}$ se dice casi nula si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 0$, para todo $n > N$. Demuestre que toda sucesión casi nula es de Cauchy.

Tarea: Asumiendo que S es un anillo con las operaciones definidas en S ; use lo demostrado en b para mostrar que S tiene divisores de cero. Es decir, hay elementos distintos a la sucesión del cero cuyo producto es la sucesión cero.

Solución: Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión casi nula. Por definición, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 0$, con $n > N$.

Sea $\epsilon > 0$ y $n, m > N$, entonces:

$$|x_n - x_m| = |0 - 0| = 0 < \epsilon$$

Esto es, $\{x_n\}_n$ es de Cauchy. Use estas sucesiones para demostrar que hay sucesiones que son no nulas, es decir, son distintas al neutro aditivo definido en a , tales que su producto es nulo. \square

Ejercicio 3: Dé un ejemplo de un dominio entero ordenado que no sea ni \mathbb{Q} ni \mathbb{R} .

Solución: Desarrollo el próximo viernes.