



1. Recuerdo

Uno de los objetivos de esta parte del curso es poder asociar a cada número real con un único decimal sin cola de 9. Para ello, en clases definieron la siguiente función:

$$D : \{\text{Decimal sin cola de 9}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \dots \longmapsto a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$$

La idea es mostrar que D es biyectiva. Basta entonces, mostrar una función inversa para D . Es decir, se debe encontrar una función que asocie a un real α con un decimal sin cola de 9 (recuerde que un decimal se define simplemente como un objeto de la forma $a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$, donde $a_0 \in \mathbb{Z}$ se le llama parte entera del decimal y $a_1 a_2 a_3, \dots \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$ se le llama parte fraccionaria, donde cada a_i son naturales entre 0 y 9). Gracias al algoritmo mostrado en la ayudantía pasada esto es posible.

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \{\text{Decimal sin cola de 9}\}$$

$$\alpha \longmapsto a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

donde $a_0 = [\alpha]$ y los a_i con $i \geq 1$, se obtienen del algoritmo visto en clases y en durante la ayudantía pasada. Note que F está bien definida como función, ya que hemos mostrado que el algoritmo no genera decimales con colas de 9.

Por último, ya demostraron en clases que $(F \circ D)(a_0, a_1 a_2 a_3 \dots) = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$ y $(D \circ F)(\alpha) = \alpha$.

¿Podremos escribir a los reales en otra base que no sea la 10? Note por ejemplo que el número real $\frac{1}{4}$ puede escribirse como $0 + \frac{2}{10^1} + \frac{5}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \dots = 0,250000\dots = 0,25$ (según el algoritmo anterior). Pero también, podemos escribirlo como $\frac{1}{4} = 0 + \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \dots$.

¿Será que podemos escribir a todos los reales como una parte entera más una parte fraccionaria compuesta con potencias negativas de 2? La respuesta es que sí.

Sea $b \geq 2$, que llamamos la base de un sistema decimal para escribir números reales. Usaremos el conjunto $C_b = \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ de cifras en esta base para escribir un número natural m en base b , es decir, como

$$m = (A_n A_{n-1} \dots A_1 A_0) = \sum_{i=0}^n A_i b^i$$

con $A_j \in C_b$. Un número real $x > 0$ como decimal ó b -cimal

$$x = (A_n A_{n-1} \dots A_1 A_0 a_1 a_2 a_3 \dots)_b = \sum_{i=0}^n A_i b^i + \sum_{i=1}^{\infty} a_i b^{-i} = [x] + \sum_{i=1}^{\infty} a_i b^{-i}.$$

donde $a_i \in C_b$.

Por ejemplo, la representación del 2-cimal del $\frac{1}{4}$ es $(0, 0100\dots)_2 = (0, 01)_2$, mientras que la representación 10-cimal del racional $\frac{1}{100}$ es $(0, 0100\dots)_{10} = (0, 01)_{10}$

2. Ejercicios

1. Escriba al racional 26 en base 3.

Solución: Note que

$$26 = 3 \cdot 8 + 2$$

Por otro lado

$$8 = 3 \cdot 2 + 2$$

Por tanto

$$26 = 3 \cdot 8 + 2 = 3 \cdot (3 \cdot 2 + 2) + 2 = 3^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 = (222, 000\dots)_3$$

2. Claramente, todo 15-cimal finito $x = \sum_{i=1}^n a_i (15)^{-i}$ es racional, con $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 14\}$. Describa el conjunto de números racionales con 15-cimal finito en término de sus denominadores.

Solución: Como x es racional, podemos escribir

$$x = \frac{p}{q}$$

con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, y p coprimo con q . Es decir

$$\frac{p}{q} = \sum_{i=1}^n a_i (15)^{-i} = \frac{a_1}{15} + \frac{a_2}{15^2} + \dots + \frac{a_n}{15^n} = \frac{a_1 15^{n-1} + a_2 15^{n-2} + \dots + a_n}{15^n} = \frac{p'}{15^n}$$

donde $p' := a_1 15^{n-1} + a_2 15^{n-2} + \dots + a_n \in \mathbb{N}_0$. Luego

$$p' = \frac{15^n p}{q} \in \mathbb{N}_0 \implies q \mid 15^n \vee q \mid p$$

pero como p y q son coprimos, es imposible que suceda $q \mid p$.

Por lo tanto

$$q \mid 15^n \implies q \mid (3 \cdot 5)^n \implies q = 3^\alpha 5^\beta$$

con $0 \leq \alpha, \beta \leq n$.

Esto quiere decir que, si un real x tiene una expansión 15-cimal finita, entonces su denominador debe tener la forma $3^\alpha 5^\beta$. Por ejemplo, el racional $\frac{1}{45}$ tendrá una expansión finita en base 15, pero $\frac{1}{2}$ no. ¿Puede encontrar la expansión de $\frac{1}{2}$ en base 15? El siguiente problema nos da la respuesta.

3. Dé un algoritmo para calcular las cifras decimales a_j de un $x \in \mathbb{R}$ con $0 \leq x < 1$.
Escriba $\frac{1}{2}$ como 15- cimal.

Solución: Definimos

$$a_0 = [x] \wedge f_1 = x - [x]$$

$$a_n := [bf_n] \wedge f_{n+1} = bf_n - [bf_n]$$

Da inductivamente una sucesión de cifras $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$ y f_1, f_2, \dots, f_{n+1} tales que

$$x = \sum_{i=0}^n a_i b^{-i} + \frac{f_{n+1}}{b^n}$$

con $0 \leq f_i < 1$.

Ocupemos el algoritmo definido.

$$a_0 = \left[\frac{1}{2} \right] = 0$$

$$f_1 = \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} \implies a_1 = [15f_1] = \left[\frac{15}{2} \right] = 7$$

$$f_2 = \frac{15}{2} - \left[\frac{15}{2} \right] = \frac{15}{2} - 7 = \frac{1}{2} \implies a_2 = [15f_2] = \left[\frac{15}{2} \right] = 7$$

...

Afirmamos que $f_n = \frac{1}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo haremos por inducción sobre n :

- $n=1$, ya está hecho.
- Asumamos que se cumple para n , es decir, $f_n = \frac{1}{2}$. Por definición $f_{n+1} = 15f_n - [15f_n] = \frac{15}{2} - \left[\frac{15}{2} \right] = \frac{15}{2} - 7 = \frac{1}{2}$.

Concluimos que $f_n = \frac{1}{2}$, para todo n , y por tanto, $a_n = [15f_n] = \left[\frac{15}{2} \right] = 7$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Así, en base 15, se tiene que

$$\frac{1}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{7}{15^i} + \frac{f_{n+1}}{15^n} = \sum_{i=1}^n \frac{7}{15^i} + \frac{\frac{1}{2}}{15^n}$$

Note que si tomamos $n \rightarrow \infty$, entonces $\frac{1}{15^n} \rightarrow 0$. Entonces

$$\frac{1}{2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{7}{15^i} =: (0,777777\dots)_{15}$$

4. a) Demuestre que la expansión 15-cimal de un $x > 0$, dada por el algoritmo, siempre cumple

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{15^i}$$

Solución: Para $n \in \mathbb{N}$, el algoritmo nos da una sucesión de $a_0, a_1, \dots, a_n \in \{0, 1, \dots, 14\}$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{15^i} + \frac{f_{n+1}}{15^{n+1}}$$

donde $0 \leq f_{n+1} < 1$. Tomando $n \rightarrow \infty$, se tiene $\frac{f_{n+1}}{15^{n+1}} \rightarrow 0$ (ya que, $f_{n+1} < 1$, para cualquier n). Así, $x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{15^i}$.

- b) Demuestre que todo real x con $0 \leq x < 1$ se puede escribir como 15-cimal sin cola de 14 (es decir, sin que $a_j = 14$, para todo j lo suficientemente grande).

Solución: Supongamos por contradicción que existe un real $0 \leq x < 1$ tal que el algoritmo si produce cola de 14. Esto es, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 14$, para todo $n \geq n_0$. Sabemos que

$$x = \frac{a_1}{15} + \frac{a_2}{15^2} + \dots + \frac{a_{n_0-1}}{15^{n_0-1}} + \frac{f_{n_0}}{15^{n_0-1}} \wedge x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{15^i} = \sum_{i=1}^{n_0-1} \frac{a_i}{15^i} + \sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{14}{15^i}$$

Luego

$$\frac{f_{n_0}}{15^{n_0-1}} = \sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{14}{15^i} = \frac{14}{15^{n_0}} \frac{15}{14} = \frac{1}{15^{n_0-1}} \implies f_{n_0} = 1$$

Lo cual es una contradicción, ya que $f_{n_0} < 1$.