



## 1. Recuerdo

Sea  $\alpha \geq 0$  un número real. Definimos

$$a_0 = [\alpha] \wedge f_1 = \alpha - [\alpha]$$

$$a_n := [10f_n] \wedge f_{n+1} = 10f_n - [10f_n]$$

Da inductivamente una sucesión de cifras  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  y  $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$  tales que

$$\alpha = \sum_{i=0}^n a_i 10^{-i} + \frac{f_{n+1}}{10^n}$$

con  $0 \leq f_i < 1$ . Probarán que

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i 10^{-i} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 10^{-i}$$

Por ejemplo, si  $x = \frac{1}{3}$ , calculemos  $\{a_i\}_i$ . Note que  $a_0 = [\frac{1}{3}] = 0$ , ya que  $0 \leq \frac{1}{3} < 0 + 1$ . Para calcular  $a_1$ , necesitamos primero calcular  $f_1$ :

$$f_1 = \frac{1}{3} - \left[\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3}.$$

Entonces

$$a_1 = [10f_1] = \left[10 \cdot \frac{1}{3}\right] = 3$$

Ahora calculemos  $f_2$ :

$$f_2 = 10f_1 - [10f_1] = 10 \cdot \frac{1}{3} - \left[10 \cdot \frac{1}{3}\right] = \frac{10}{3} - 3 = \frac{1}{3} = f_1$$

No es difícil probar que  $f_n = \frac{1}{3}$  para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ , y por ende,  $a_n = 3$ , para  $n \geq 1$ . Luego

$$\frac{1}{3} = \sum_{i=0}^{\infty} 3 \cdot 10^{-i} := 0,3333\dots$$

## 2. Ejercicios

1. Demuestre que el algoritmo dado más arriba no produce decimales con cola de 9. ( $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tiene cola de 9, si para el algoritmo existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n = 9$ , para  $n \geq n_0$ ).

Solución: Sea  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  con cola de 9. Por el lema del recuerdo, se tiene que existe una sucesión de cifras  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$  y  $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$  tales que

$$\alpha = \sum_{i=0}^n a_i 10^{-i} + \frac{f_{n+1}}{10^n}$$

con  $0 \leq f_i < 1$ .

Por otro lado, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n = 9$ , para  $n \geq n_0$ . Entonces, tomando  $n = n_0$  en el algoritmo, existen  $a_1, \dots, a_{n_0} \in \{0, 1, \dots, 9\}$  tales que

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=0}^{n_0-1} a_i 10^{-i} + \frac{f_{n_0+1}}{10^{n_0-1}} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 10^{-i} = \sum_{i=0}^{n_0-1} a_i 10^{-i} + \sum_{i=n_0}^{\infty} a_i 10^{-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n_0-1} a_i 10^{-i} + \sum_{i=n_0}^{\infty} 9 \cdot 10^{-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n_0-1} a_i 10^{-i} + \frac{9}{10^{n_0}} \cdot \frac{10}{9} \\ &= \sum_{i=0}^{n_0-1} a_i 10^{-i} + \frac{1}{10^{n_0-1}} \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{f_{n_0+1}}{10^{n_0-1}} = \frac{1}{10^{n_0-1}} \implies f_{n_0+1} = 1$$

lo cual es una contradicción, ya que  $0 \leq f_{n_0+1} < 1$ .

2. Sea  $x \in \mathbb{Q}$ ,  $x > 0$ . Decimos que tiene una expansión decimal finita, si existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $f_{n_0+1} = 0$ , de forma que

$$x = \sum_{i=0}^{n_0} a_i 10^{-i}$$

Dado un decimal  $x$  con expansión finita, demuestre que el denominador tiene la forma  $2^\alpha \cdot 5^\beta$ , con  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ . ¿Es cierto el recíproco?.

Solución: Como  $x$  tiene una expansión decimal finita, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=0}^{n_0} a_i 10^{-i} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_{n_0}}{10^{n_0}} = \frac{a_0 10^{n_0} + a_1 10^{n_0-1} + \dots + a_{n_0}}{10^{n_0}} \\ &= \frac{p'}{10^{n_0}} \end{aligned}$$

con  $p' \in \mathbb{N}$ . Ahora supongamos que  $x = \frac{p}{q}$ ; con  $p, q \in \mathbb{Z}$ , con  $q \neq 0$ , y  $p$  y  $q$  son coprimos. Luego

$$\frac{p'}{10^{n_0}} = \frac{p}{q} \implies p' = \frac{p \cdot 10^{n_0}}{q} \in \mathbb{Z}$$

Como  $q \nmid 10$ , debemos tener que  $q \mid 10^{n_0}$ . Concluimos entonces que  $q = 2^\alpha \cdot 5^\beta$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ .

El recíproco es cierto, y probablemente demostrarán en clases.  $\square$

Sea  $b \geq 2$ , que llamamos la base de un sistema decimal para escribir números reales. Usaremos el conjunto  $C_b = \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$  de cifras en esta base para escribir un número natural  $m$  en base  $b$ , es decir, como

$$m = (A_n A_{n-1} \dots A_1 A_0) = \sum_{j=0}^n A_j b^j$$

y un número real  $x > 0$  como decimal

$$x = (A_n A_{n+1} \dots A_1 A_0 a_1 a_2 a_3 \dots)_b = \sum_{j=0}^{n-1} A_j b^j + \sum_{i=1}^{\infty} a_i b^{-i}$$

3. Claramente, todo decimal finito  $x = \sum_{i=1}^N a_i b^{-i}$ , con  $a_i \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ , es racional. Describa el conjunto de números racionales con decimal finito en término de denominadores. (Asuma que  $b$  es libre de cuadrados).

Solución: Supongamos que  $b = p_1 p_2 p_3 \dots p_k$ , con  $p_i$  primos. Entonces

$$\begin{aligned} x = \sum_{i=1}^N a_i b^{-i} &= \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \frac{a_3}{b^3} + \dots + \frac{a_N}{b^N} = \frac{a_1 b^{N-1} + a_2 b^{N-2} + \dots + a_N}{b^N} \\ &= \frac{p'}{b^N} \end{aligned}$$

con  $p' \in \mathbb{Z}$ . Supongamos que  $x = \frac{p}{q}$ ; con  $p, q \in \mathbb{Z}$ , con  $q \neq 0$ , y  $p$  y  $q$  son coprimos. Luego

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{b^N} \implies p' = \frac{p b^N}{q} \in \mathbb{Z}$$

Como  $q \nmid p$ , se debe tener que  $q \mid b^N$ . Es decir,  $q \mid (p_1 p_2 p_3 \dots p_k)^N$ . ¿Qué forma debe tener  $q$ ?  $\square$