



1. Recuerdo...

Ya se ha demostrado que el conjunto de cortaduras de Dedekind \mathcal{D} es un cuerpo completo y ordenado. El objetivo de ahora es demostrar que todos los cuerpos ordenados y completos son isomorfos (es decir, dados dos cuerpo ordenados y completos, existe un homomorfismo de cuerpos biyectivo que respeta el orden). En consecuencia, tendrá que $\mathbb{R} \cong \mathcal{D}$.

En clases se demostró que todo cuerpo ordenado F contiene una copia isomorfa de \mathbb{Q} , la cual llamaremos \mathbb{Q}_F . La siguiente función es un isomorfismo de cuerpos que respeta el orden

$$\phi'_F : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}_F$$

definido $\phi'(p) = \phi'_F(\frac{n}{m}) = n_F \cdot (m_F)^{-1} = p_F$, de donde

$$n_F = \begin{cases} 1_F + \dots + 1_F & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ -(1_F + 1_F + \dots + 1_F) & \text{si } -n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Por tanto, dado dos cuerpos ordenados, existe un isomorfismo ordenado $\phi : \mathbb{Q}_F \longrightarrow \mathbb{Q}_G$ definida por $\phi(p_F) = p_G$.

Se puede extender este isomorfismo, a uno de G a F . En efecto, el isomorfismo mencionado es

$$\Gamma : F \longrightarrow G$$

definido por $\Gamma(r) = \sup\{\phi(p) : p \in \mathbb{Q}_F, p < r\}$.

Además, se cumple que $\Gamma(p) = \phi(p)$, para todo $p \in \mathbb{Q}_F$ (Ejercicio 2, inciso b)).

Ejercicio 1: Dé una idea de como demostrar que $\Gamma(r + r') = \Gamma(r) + \Gamma(r')$; $r, r' \in F$.

Nota: Asuma que \mathbb{Q}_F es denso en F (esto es, si $r < r'$, entonces existe $p \in \mathbb{Q}_F$ tal que $r < p < r'$; y que se satisface la propiedad arquimediana (esto es, si $\epsilon > 0_F$, con $\epsilon \in F$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon < n_F$)).

Solución: Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario.

Note que

$$r - \frac{1}{n_F} < r < r + \frac{1}{n_F}$$

Por densidad, existen $p, q \in \mathbb{Q}_F$ tal que

$$r - \frac{1}{n_F} < p < r < q < r + \frac{1}{n_F}$$

Es sencillo ver que

$$q - p < \frac{2}{n_F} \wedge p < r < q$$

Aplicamos Γ en la segunda desigualdad:

$$\Gamma(p) < \Gamma(r) < \Gamma(q) \implies \phi(p) < \Gamma(r) < \phi(q)$$

Del mismo modo, tomando esta vez r' , en vez de r , obtenemos que:

$$\phi(p') < \Gamma(r') < \phi(q')$$

donde

$$q' - p' < \frac{2}{n_F} \wedge p' < r' < q'$$

Así,

$$\phi(p + p') = \phi(p) + \phi(p') < \Gamma(r) + \Gamma(r') < \phi(q) + \phi(q') = \phi(q + q')$$

Además, note que

$$\begin{aligned} p + p' < r + r' < q + q' &\implies \Gamma(p + p') < \Gamma(r + r') < \Gamma(q + q') \\ &\implies \phi(p + p') < \Gamma(r + r') < \phi(q + q') \end{aligned}$$

En conclusión, tenemos principalmente dos desigualdades:

$$\phi(p + p') < \Gamma(r) + \Gamma(r') < \phi(q + q')$$

$$\phi(p + p') < \Gamma(r + r') < \phi(q + q')$$

Además, es claro que

$$(p + p') - (q + q') < \frac{4}{n_F} \implies \phi(p + p') - \phi(q + q') < \frac{4}{n_G}$$

¿Qué pasa si n es muy grande? Para concluir, proceda por contradicción (esto es, existen $r, r' \in F$ tal que $\Gamma(r + r') \neq \Gamma(r) + \Gamma(r')$) y use la propiedad arquimediana. \square

Ejercicio 2: Dé un ejemplo de un dominio entero ordenado que no sean los clásicos \mathbb{Z} , \mathbb{Q} ni \mathbb{R} .

Solución: Sea $\mathbb{Q}[X]$ el conjunto de polinomios con coeficientes en \mathbb{Q} . Es decir

$$\mathbb{Q}[X] = \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 : a_i \in \mathbb{Q}\}$$

Definimos el coeficiente líder de un polinomio $p(X) = a_n X^n + \dots + a_0$ al término a_n . Denotamos $cs(p(X)) = a_n$. Por convención, diremos que $cs(0_{\mathbb{Q}[X]}) = 0$, donde $0_{\mathbb{Q}[X]}$ es el polinomio nulo. Entonces, diremos que

$$p(X) > 0_{\mathbb{Q}[X]} \iff cs(p(X)) > 0$$

Así, diremos que

$$p(X) < q(X) \iff q(X) - p(X) > 0 \iff cs(q(X) - p(X)) > 0$$

Por ejemplo, $x^2 > 0_{\mathbb{Q}[X]}$; $4x^4 > x^4 + 100000x^3$; $-3x^{56} + 3x < 0_{\mathbb{Q}[X]}$.

Demostremos que $(\mathbb{Q}[X], <)$ es un dominio ordenado. Como ya sabemos que $\mathbb{Q}[X]$ es un dominio entero con las operaciones usuales de polinomios (se sabe de estructuras), solo nos basta demostrar las siguientes cosas:

- $<$ cumple la propiedad transitiva. Es decir, si $p(X) < q(X)$ y $q(X) < k(X)$ entonces $p(X) < k(X)$.
- $<$ satisface la tricotomía. Es decir, si $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$, entonces $p(X) > 0_{\mathbb{Q}[X]} \vee -p(X) > 0_{\mathbb{Q}[X]} \vee p(X) = 0_{\mathbb{Q}[X]}$
- $<$ respeta la suma y el producto, es decir,

$$p(X) < q(X) \implies p(X) + h(X) < q(X) + h(X); \quad p, q, h \in \mathbb{Q}[X]$$

$$p(X) < q(X) \implies p(X)h(X) < q(X)h(X); \quad p, q, h \in \mathbb{Q}[X] \wedge h(X) > 0_{\mathbb{Q}[X]}$$

La tricotomía es sencilla de comprobar: Sea $p(X) = a_n x^n + \dots + a_0 \neq 0_{\mathbb{Q}[X]}$, entonces $cs(p(X)) \neq 0$. Por la tricotomía que existe en \mathbb{Q} , tendremos que

$$cs(p(X)) > 0 \vee cs(p(X)) < 0$$

En el primer caso, se tiene por definición que $p(X) > 0_{\mathbb{Q}[X]}$; mientras que en el segundo caso, tendremos que $cs(-p(X)) > 0$, y por ende, $-p(X) > 0_{\mathbb{Q}[X]}$.

Luego se tiene que:

$$p(X) > 0_{\mathbb{Q}[X]} \vee -p(X) > 0_{\mathbb{Q}[X]} \vee p(X) = 0_{\mathbb{Q}[X]}$$

La transitividad es algo tediosa porque son muchos los casos a estudiar, pero no es difícil comprobarla.

Veamos algunos de casos mencionados. Supongamos que $gr(p) = gr(q) = gr(k)$. Digamos que

$$\begin{aligned} p(X) &= \sum_{i=0}^n a_i X^i \\ q(X) &= \sum_{i=0}^n b_i X^i \\ k(X) &= \sum_{i=0}^n c_i X^i \end{aligned}$$

Luego, tendremos que

$$cs(k - p) = c_n - a_n = (c_n - b_n) + (b_n - a_n) = cs(k - q) + cs(q - p) > 0 + 0 = 0$$

Es decir, $p(X) < k(X)$ si $p(X) < q(X)$ y $q(X) < k(X)$.

El resto de casos se dejan como ejercicios. Como ayuda, note que si $gr(p) < gr(q)$, entonces $cs(q - p) = cs(q)$.

Por último, note que es directo de la definición que $<$ respeta la suma. En efecto

$$p(X) + h(X) < q(X) + h(X) \iff (q(X) + h(X)) - (p(X) + h(X)) = q(X) - p(X) > 0_{\mathbb{Q}[X]}$$

El producto se deja como ejercicio.

Para el ejercicio 3, necesitamos primero un cuerpo. Como dice la nota de la guía, construyamos el cuerpo cociente asociado al dominio ordenado $\mathbb{Q}[X]$. Esto es, el cuerpo

$$\mathbb{Q}(X) = \left\{ \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} : a_i \in \mathbb{Q}, b_i \in \mathbb{Q} \right\}$$

cuyas operaciones vienen dada por

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} + \frac{k}{r} &= \frac{pr + kq}{qr} \\ \frac{p}{q} \cdot \frac{k}{r} &= \frac{pk}{qr} \end{aligned}$$

donde $p, k, q, r \in \mathbb{Q}[X]$. Note que todo elemento $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}(X)$ puede tomarse con $q > 0_{\mathbb{Q}[X]}$ (¿por qué?, piense en \mathbb{Q}).

Podemos definir un orden aquí que hace de $\mathbb{Q}(X)$ un cuerpo ordenado. Decimos que

$$\frac{p}{q} <' \frac{k}{r} \iff pr < kq$$

donde $<$ es el orden definido para $\mathbb{Q}[X]$.

Demuestre que $\mathbb{Q}(X)$ con $<'$ es un cuerpo ordenado. Por último, es posible demostrar que $\mathbb{Q}(X)$ es no arquimediano. De hecho, es posible ver que $\mathbb{Q}[X]$ no cumple la propiedad arquimediana (y luego, $\mathbb{Q}(X)$ tampoco la cumple). Es decir, existe $p \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $p > n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (aquí n representa al polinomio constante n).

No es complicado encontrar tal polinomio p , recuerde que $p > n$, si y sólo si, $cs(p - n) > 0$.