



## 1. Recuerdo...

Ya se ha demostrado que el conjunto de cortaduras de Dedekind  $\mathcal{D}$  es un cuerpo completo y ordenado. El objetivo de ahora es demostrar que todos los cuerpos ordenados y completos son isomorfos (es decir, existe un homomorfismo biyectivo que respeta el orden), y como consecuencia directa de esto, se demostrará que  $\mathbb{R} \cong \mathcal{D}$ .

En clases se demostró que todo cuerpo ordenado  $F$  contiene una copia isomorfa de  $\mathbb{Q}$ , que llamaremos  $\mathbb{Q}_F$ . El isomorfismo mencionado es

$$\phi'_F : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}_F$$

definido  $\phi'_F\left(\frac{n}{m}\right) = n_F \cdot (m_F)^{-1}$ , de donde

$$n_F = \begin{cases} 1_F + \dots + 1_F & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ -(1_F + 1_F + \dots + 1_F) & \text{si } -n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Por tanto, dado 2 cuerpo ordenados, existe  $\phi : \mathbb{Q}_F \longrightarrow \mathbb{Q}_G$  definida por  $\phi(p_F) = p_G$ .

Dado dos cuerpos ordenados y completos; digamos  $G$  y  $F$ , el isomorfismo (que además es único) buscado es:

$$\Gamma : F \longrightarrow G$$

definido por  $\Gamma(r) = \sup\{\phi(p) : p \in \mathbb{Q}_F, p < r\}$ .

**Ejercicio 1:** Demuestre que la función  $\Gamma$  creciente. Es decir, demuestre que:

$$r < t \implies \Gamma(r) \leq \Gamma(t)$$

Solución: Basta con demostrar que  $\{\phi(p) : p < r, p \in \mathbb{Q}_F\} \subset \{\phi(p) : p < t, p \in \mathbb{Q}_F\}$ , ya el supremo se preserva por contenciones (es decir, si  $A \subset B \implies \sup A \leq \sup B$  (¿Por qué?)). Sea  $\phi(p) \in \{\phi(p) : p < r, p \in \mathbb{Q}_F\}$ . Entonces en particular  $p < r$ . Pero como  $r < t$ , por la transitividad de la relación de orden,  $p < t$ . Es decir,  $\phi(p) \in \{\phi(p) : p < t, p \in \mathbb{Q}_F\}$ . Luego se tiene la contención.

Aplicando supremo en la contención, concluimos que  $\Gamma(r) \leq \Gamma(t)$ .

**Ejercicio 2:** Una sucesión de número racionales  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  se dice de Cauchy ssi

$$\forall \epsilon > 0, \text{ con } \epsilon \in \mathbb{Q}, \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \epsilon, \forall n, m \geq N$$

a. Sea  $S$  el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy. Defina una suma y producto sobre este conjunto  $S$ . Conjecture un neutro aditivo y un neutro multiplicativo.

Solución: Sean  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in S$  y  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in S$ . Definimos

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} + \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} := \{a_n + b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cdot \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} := \{a_n b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Para demostrar que estas operaciones están bien definidas tenemos que demostrar que si:  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in S$  entonces

$$\begin{aligned} \{a_n + b_n\}_{n \in \mathbb{N}} &\in S \\ \{a_n b_n\}_{n \in \mathbb{N}} &\in S \end{aligned}$$

Demostremos la primera pertenencia.

Sea  $\epsilon > 0$ . Por demostrar que

$$\exists R \in \mathbb{N} : |(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| < \epsilon, \forall n, m \geq R$$

Por hipótesis, tenemos que:

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in S \iff \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}, \forall n, m \geq N$$

$$\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in S \iff \exists M \in \mathbb{N} : |b_n - b_m| < \frac{\epsilon}{2}, \forall n, m \geq M$$

Entonces el  $R$  buscado es  $R := \max\{N, M\}$ . En efecto, si  $n, m \geq R$  (y luego  $n, m \geq N$  y  $n, m \geq M$ ), se tiene:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| &= |(a_n - a_m) + (b_n - b_m)| \leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Para el producto, note que:

$$|a_n b_n - a_m b_m| = |b_n(a_n - a_m) + a_m(b_n - b_m)| \leq |b_n|(a_n - a_m)| + |a_m|(b_n - b_m)|$$

y use que toda sucesión de Cauchy es acotada.

El neutro aditivo de  $S$  lo definimos simplemente como la sucesión cuyos términos son todos cero; y el neutro multiplicativo como la sucesión cuyos términos son todos el racional 1.  $\square$

- b. Una sucesión  $\{a_n\}_n \subset \mathbb{Q}$  se dice casi nula si existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n = 0$ , para todo  $n > N$ . Demuestre que toda sucesión casi nula es de Cauchy.

Tarea: Asumiendo que  $S$  es un anillo con las operaciones definidas en  $S$ ; use lo demostrado en b para mostrar que  $S$  tiene divisores de cero. Es decir, hay elementos distintos a la sucesión del cero cuyo producto es la sucesión cero.

Solución: Sea  $\{x_n\}_n$  una sucesión casi nula. Por definición, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n = 0$ , con  $n > N$ .

Sea  $\epsilon > 0$  y  $n, m > N$ , entonces:

$$|x_n - x_m| = |0 - 0| = 0 < \epsilon$$

Esto es,  $\{x_n\}_n$  es de Cauchy. Use estas sucesiones para demostrar que hay sucesiones que son no nulas, es decir, son distintas al neutro aditivo definido en  $a$ , tales que su producto es nulo.  $\square$

**Ejercicio 3:** Dé un ejemplo de un dominio entero ordenado que no sea ni  $\mathbb{Q}$  ni  $\mathbb{R}$ .

Solución: Desarrollo el próximo viernes.