UNIVERSIDAD
DE CHILE

Ayudantía 4
Curso: Sistemas Numéricos
Fecha: 5 de septiembre de 2021
Profesor de Cátedra: Eduardo Friedman
Ayudante: Claudio Carrasco Gómez

# 1. Recuerdos...

**Definición**: Diremos que un corte $\alpha$ es menor que un corte $\beta$ ($\alpha < \beta$) si $\alpha \subsetneq \beta$.
También que $\alpha \leq \beta \iff \alpha < \beta \vee \alpha = \beta$.

**Definición**: Sean $A$ y $B$ cortaduras de Dedekind. Entonces:

1. $A + B = \{a + b : a \in A \wedge b \in B\}$.
2. $A \cdot B = \{ab : a \in A, b \in B, a, b \geq 0\} \cup 0^*$; si $A, B \geq 0^*$.

# 2. Ejercicios

1. *a*) Muestre que $2021^* < 2022^*$.

   Solución: Por demostrar que $2021^* \subsetneq 2022^*$.
   Sea $x \in 2021^*$, es decir, $x < 2021$. Pero $2021 < 2022$, por lo que $x < 2022$, y $x \in 2022^*$.
   Además, $\frac{2022+2021}{2} \in 2022^*$, pero $\frac{2022+2021}{2} \notin 2021^*$. Se concluye que $2021^* \subsetneq 2022^*$.

   $\square$

   *b*) Demuestre que $\sqrt{2} < 2^*$, donde como siempre $\sqrt{2} := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2 \wedge x \geq 0\} \cup 0^*$.

   Solución: Sea $y \in \sqrt{2}$. Hay 2 opciones: $y \in \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2 \wedge x \geq 0\} \vee y \in 0^*$.

   - Si $y \in 0^*$, entonces $y < 0$. Pero $0 < 2$, por lo que $y \in 2^*$.
   - Si $y \in \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2 \wedge x \geq 0\}$, entonces $y^2 < 2$ y $y \geq 0$. Supongamos por contradicción que $y \notin 2^*$, es decir, $y \geq 2$.
     Note que en particular, $y > 1$, por lo que $y^2 \geq y$ (el sentido no cambia, ya que $y \geq 0$). Luego $y^2 \geq 2$. Contradicción. Concluimos que $y \in 2^*$.

   Además, note que $\frac{3}{2} \in 2^*$, ya que $\frac{3}{2} < 2$; pero $\frac{3}{2} \notin \sqrt{2}$, pues $(\frac{3}{2})^2 > 2$.

   $\square$

2. Sean $A, B$ cortaduras de Dedekind que cumplen que $A, B \geq 0^*$. Demuestre que si $A \cdot B = 0^*$ entonces $A = 0^* \lor B = 0^*$.

   Solución: Supondremos que $A \neq 0^*$, y mostraremos que $B = 0^*$. Note que como $0^* \subset B$ (ya que $0^* \leq B$), nos basta demostrar que $B \subset 0^*$.
   Sea $b \in B$ (PD: $b < 0$). Supongamos por contradicción que $b \geq 0$.
   Por otro lado, dado que $A \neq 0^*$, y $0^* \subset A$, debe existir $a \in A$, con $a > 0$.

   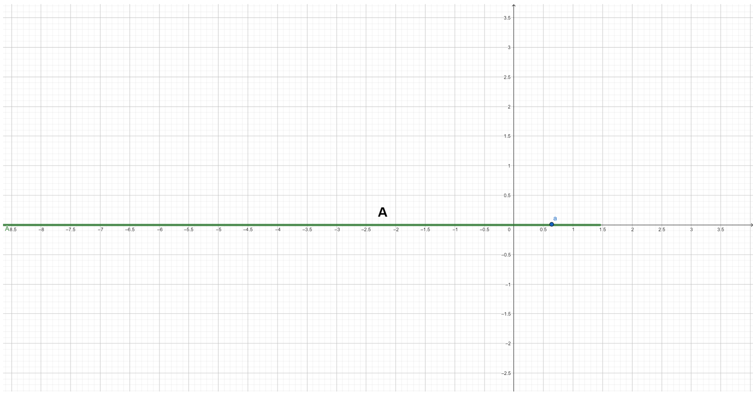
   

   Figura 1: En verde el corte $A$.

   Luego $ab \in A \cdot B$. Pero como $A \cdot B = 0^*$, tendremos que $ab \in 0^*$, es decir, $ab < 0$. Contradicción.
   Por lo tanto $b < 0$, y $B \subset 0^*$. Concluimos que $B = 0^*$.
   En rigor, también tenemos que ver el otro caso, esto es, suponer que $B \neq 0^*$, y mostrar que $A = 0^*$; pero es completamente análogo. $\square$

3. Encuentre un corte para el racional 1 usando series.

<u>Solución</u>: Recordemos de cálculo 2 que:

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

Esto significa que las sumas parciales $\{S_n = \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{2})^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ de esta serie se acercan cada vez más a 1:

*a*) $S_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

*b*) $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = 0{,}75$.

*c*) $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = 0{,}875$.

*d*) $S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = 0{,}9375$.

*e*) $S_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} = 0{,}96875$.

*f*) etc

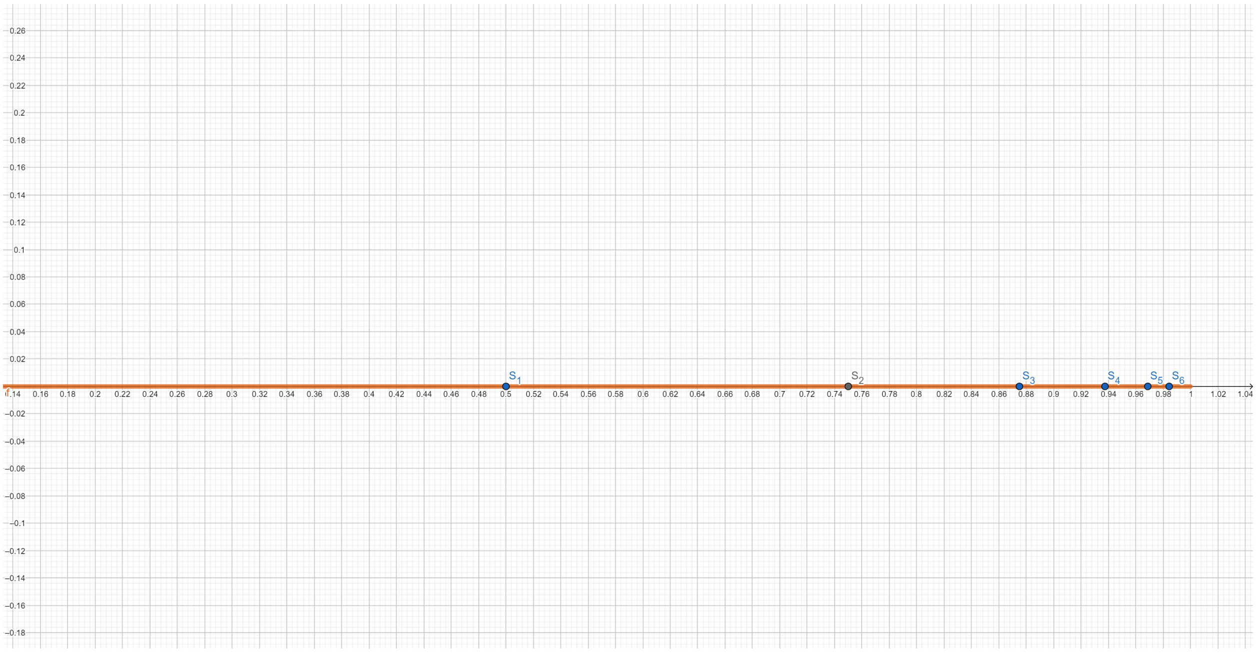


Figura 2: Algunos términos de la sucesión de de sumas parciales $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Así, el corte se puede definir como $1' = \{p \in \mathbb{Q} : p < \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{2})^i ; \text{para algún}\, n \in \mathbb{N}\}$. Por supuesto, se puede demostrar que $1^* = 1'$.

$\square$