UNIVERSIDAD
DE CHILE

Ayudantía 3
Curso: Sistemas Numéricos
Fecha: 27 de agosto de 2021
Profesor de Cátedra: Eduardo Friedman
Ayudante: Claudio Carrasco Gómez

1. Recuerdos...

1. **Definición 1:** Decimos que $A \subseteq \mathbb{Q}$ es una *cortadura (o corte) de Dedekind* si se satisfacen las siguientes condiciones:
   a) $A \neq \phi$.
   b) $A \neq \mathbb{Q}$.
   c) Dado $x \in A$ e $y < x$, entonces $y \in A$ (decimos que A es cerrado hacia abajo).
   d) A no tiene máximo. Equivalentemente, dado cualquier $x \in A$ siempre existe $y_x \in A$ tal que $x < y_x$.
2. **Definición 2:** Sean A y B cortaduras de Dedekind. Se define
$$A + B := \{a + b : a \in A\,, b \in B\}$$
3. **Definición 3 (*Propiedad Arquimediana en* $\mathbb{Q}$):** Para todo $\epsilon > 0$, con $\epsilon \in \mathbb{Q}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$.
   Nota: Esto lo demostrarán más adelante.

2. Ejercicios

Ejercicio 1: Demuestre que $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < 1 - \frac{1}{n};\text{para algún } n \in \mathbb{N}\}$ es un corte de Dedekind, y que $A = 1^*$.

Solución: Para ver si es corte comprobemos las propiedades requeridas:

1. $A \neq \phi$, pues $\frac{1}{3} < 1 - \frac{1}{2}$, por lo que $\frac{1}{3} \in A$.
2. Es fácil ver que $2 \notin A$, pues si perteneciera, debería existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $2 < 1 - \frac{1}{n}$. Es decir, $1 < -\frac{1}{n}$. Una contradicción.
3. Sea $x \in A$ e $y < x$. Por hipótesis, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < 1 - \frac{1}{n}$. Por transitividad, $y < 1 - \frac{1}{n}$. Por tanto, $y \in A$.
4. Sea $x \in A$, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < 1 - \frac{1}{n}$. Afirmamos que $y_x = x + \frac{1}{2n} \in A$. En efecto,
$$y_x = x + \frac{1}{2n} < (1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2n}.$$
   Esto es, $y_x \in A$, pues existe $2n \in \mathbb{N}$ tal que $y_x < 1 - \frac{1}{2n}$. Además $y_x > x$.
   Por lo tanto A no tiene máximo.

La igualdad pedida se hará por doble contención.
Sea $x \in A$, entonces debe existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < 1 - \frac{1}{n} < 1$. Por tanto, $x \in 1^*$.
Por otro lado, sea $x \in 1^*$. Esto es, $x < 1$.
Luego para $1 - x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < 1 - x$ (por propiedad arquimediana). Implica que $x < 1 - \frac{1}{n}$. Por lo tanto $x \in A$. $\square$

Ejercicio 2: Encuentre un corte con derecho a llamarse $\sqrt[3]{2}$.

<u>Solución</u>: Podemos considerar el polinomio $p(x) = x^3 - 2$ y definir el corte como:

$$\sqrt[3]{2} = \{x \in \mathbb{Q} : x^3 - 2 < 0 \ \wedge \ x \geq 0\} \cup 0^*$$

Comprobemos que $\sqrt[3]{2}$ es un corte:

1. $\sqrt[3]{2} \neq \phi$, ya que $-100 \in \sqrt[3]{2}$.

2. $\sqrt[3]{2} \neq \mathbb{Q}$, ya que $100 \notin \sqrt[3]{2}$.

3. Sea $x \in \sqrt[3]{2}$ e $y < x$. Hay 2 opciones: $x \in \{x \in \mathbb{Q} : x^3 - 2 < 0 \ \wedge \ x \geq 0\}$ ó $x \in 0^*$.
   Si $x \in 0^*$, entonces es evidente que $y \in 0^*$, y por tanto, $y \in \sqrt[3]{2}$.
   Supongamos entonces que $x \in \{x \in \mathbb{Q} : x^3 - 2 < 0 \wedge x \geq 0\}$. Por hipótesis, $x^3 - 2 < 0$, $x \geq 0$, y $y^3 < x^3$, por lo que

   $$y^3 - 2 < x^3 - 2 < 0 \ \wedge \ y \geq 0.$$

   (podemos asumir que $y \geq 0$, ya que si $y < 0$ se obtiene lo querido). Así, $y \in \{x \in \mathbb{Q} : x^3 - 2 < 0 \ \wedge \ x \geq 0\}$, y por lo tanto, $y \in \sqrt[3]{2}$.

4. Dado $x \in \sqrt[3]{2}$, buscaremos $y_x \in \sqrt[3]{2}$ y $x < y_x$. Hay 2 opciones: $x \in \{x \in \mathbb{Q} : x^3 - 2 < 0 \ \wedge \ x \geq 0\}$ ó $x \in 0^*$.
   Si $x \in 0^*$, basta escoger $y_x = \frac{x}{2} \in 0^* \subset \sqrt[3]{2}$.
   Supongamos ahora que $x \in \{x \in \mathbb{Q} : x^3 - 2 < 0 \wedge x \geq 0\}$. Supongamos que $y_x = x + \delta$, con $\delta > 0$, y escribamos un borrador para encontrar un $\delta > 0$ adecuado.

Borrador: Queremos que $y_x^3 - 2 < 0$ y que $y_x \geq 0$. Esto último es evidente, pues $x \geq 0$ y $\delta > 0$. Estudiemos la primera condición:

$$y_x^3 - 2 = x^3 - 2 + 3x^2\delta + 3x\delta^2 + \delta^3$$

Como es habitual, supongamos adicionalmente que $\delta < 1$, por lo que, $\delta^2 < 1$, $\delta^3 < 1$, y

$$y_x^3 - 2 = x^3 - 2 + 3x^2\delta + 3x\delta^2 + \delta^3 < x^3 - 2 + 3x^2\delta + 3x\delta + \delta < 0$$

Es decir

$$\delta(3x^2 + 3x + 1) < 2 - x^3$$

Note que $3x^2+3x+1 > 0$, pues $x \geq 0$, y entonces, podemos dividir sin problemas:

$$\delta < \frac{2 - x^3}{3x^2 + 3x + 1}.$$

Por lo tanto, basta tomar cualquier δ que satisfaga que:

$$0 < \delta < \text{mín}\{1, \frac{2 - x^3}{3x^2 + 3x + 1}\}.$$

Vea también que $\frac{2-x^3}{3x^2+3x+1} > 0$, ya que es cociente de racionales positivos.

Demostración: Si $x \in \{x \in \mathbb{Q} : x^3 - 2 < 0 \wedge x \geq 0\}$, nos basta escoger $y_x = x + \delta$, con $0 < \delta < \text{mín}\{1, \frac{2-x^3}{3x^2+3x+1}\}$. Note que es inmediato que $y_x > x$, y que

$$y_x^3 - 2 = x^3 - 2 + 3x^2\delta + 3x\delta^2 + \delta^3$$

Como $0 < \delta < \text{mín}\{1, \frac{2-x^3}{3x^2+3x+1}\}$, implica que $\delta < 1$, y por tanto, $\delta^2 < 1$ y $\delta^3 < 1$:

$$y_x^3 - 2 < x^3 - 2 + 3x^2\delta + 3x\delta + \delta = x^3 - 2 + \delta(3x^2 + 3x + 1)$$

Así mismo, dado que $0 < \delta < \text{mín}\{1, \frac{2-x^3}{3x^2+3x+1}\}$, implica que $\delta < \frac{2-x^3}{3x^2+3x+1}$, luego

$$y_x^3 - 2 < x^3 - 2 + \delta(3x^2 + 3x + 1) < x^3 - 2 + \frac{2 - x^3}{3x^2 + 3x + 1}(3x^2 + 3x + 1) = 0$$

Demostramos que $y_x - 2 < 0$ e $y \geq 0$, por lo que $y_x \in \sqrt[3]{2}$. Concluimos que $\sqrt[3]{2}$ no tiene máximo.

$\square$

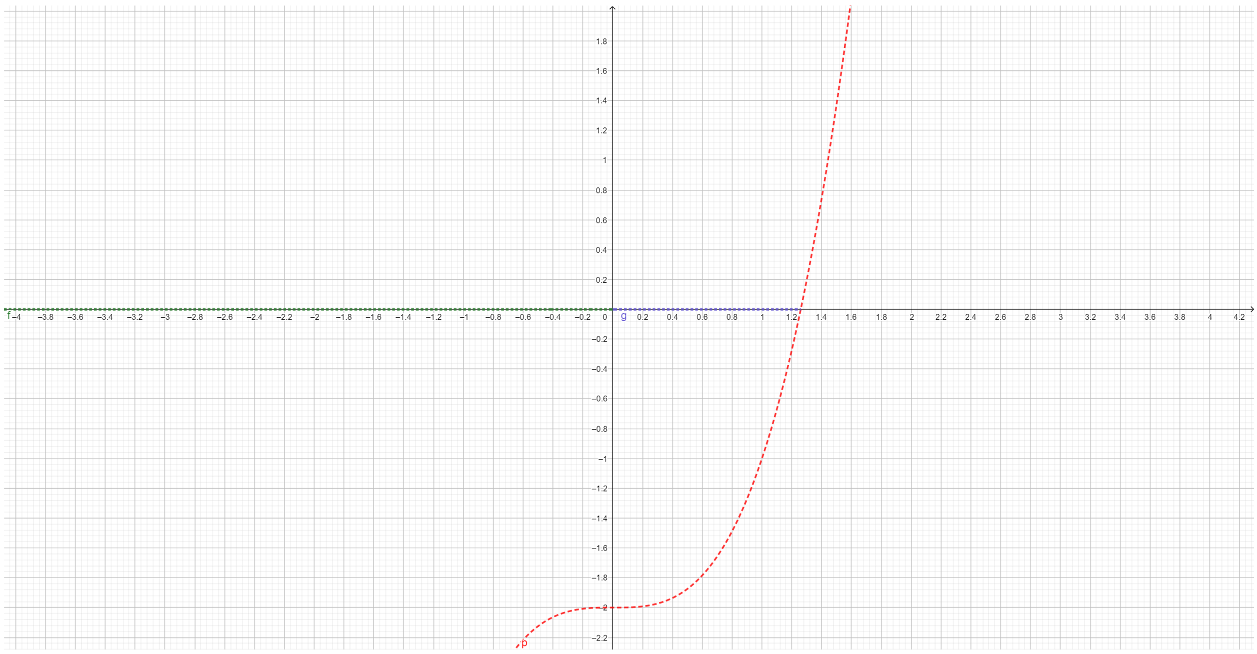

Figura 1: Gráfica del polinomio $p(x) = x^3 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$ en rojo. En morado se gráfica el conjunto $\{x \in \mathbb{Q} : x^3 - 2 < 0 \wedge x \geq 0\}$, y en verde al corte 0^*. La unión de ambos da el corte $\sqrt[3]{2}$.

Ejercicio 3: Demuestre vía doble contención que $1^* = (\frac{1}{2})^* + (\frac{1}{2})^*$.

Solución: Sea $x \in (\frac{1}{2})^* + (\frac{1}{2})^*$. Por definición, existen $a, b \in (\frac{1}{2})^*$ tal que

$$x = a + b$$

Como $a < \frac{1}{2}$ y $b < \frac{1}{2}$, se tiene que:

$$x < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \implies x \in 1^*$$

Ahora supongamos que $x \in 1^*$. Se tiene que $x < 1$, y por tanto $\frac{x}{2} < \frac{1}{2}$; por tanto $\frac{x}{2} \in (\frac{1}{2})^*$. Así, como $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \in (\frac{1}{2})^* + (\frac{1}{2})^*$, se tiene que $x \in (\frac{1}{2})^* + (\frac{1}{2})^*$.