UNIVERSIDAD
DE CHILE

Ayudantía 1
Curso: Sistemas Numéricos
Fecha: 20 de agosto de 2021
Profesor de Cátedra: Eduardo Friedman
Ayudante: Claudio Carrasco Gómez

1. Recuerdo...

Definición 1: Decimos que $A \subseteq \mathbb{Q}$ es una *cortadura (o corte) de Dedekind* si satisfacen las siguientes condiciones:

1. $A \neq \phi$.
2. $A \neq \mathbb{Q}$.
3. Dado $x \in A$ e $y < x$, entonces $y \in A$ (decimos que A es cerrado hacia abajo).
4. A no tiene máximo. Equivalentemente, dado cualquier $x \in A$ siempre existe $y_x \in A$ tal que $x < y_x$.

Por ejemplo, en clases se vio que los conjuntos:

$$\gamma^* := \{q \in \mathbb{Q} : q < \gamma\},\ \gamma \in \mathbb{Q}.$$
$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2 \wedge x > 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\}.$$

son cortaduras de Dedekind.
El objetivo de definir estos conjuntos es la construcción del cuerpo ordenado y completo de los números reales. De hecho, más adelante, definirán a $\mathbb{R}$ como el conjunto de todas las cortaduras de Dedekind. En particular, los cortes γ^* representarán a los racionales en $\mathbb{R}$ (por ejemplo, 0^* hará el papel de neutro aditivo y 1^* el de neutro multiplicativo); y el corte A representará a $\sqrt{2}$.
Por último, recordar de cátedra que $r^* = h^*$, siempre y cuando, $r = h$.

2. Ejercicios

Ejercicio 1: Determine si los siguientes conjuntos son o no cortaduras de Dedekind:

1. $A = \{x \in \mathbb{Q} : -1 < x < 1\}$.

   Solución: No es una cortadura, ya que $-2 < \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2} \in A$, pero $-2 \notin A$. Luego A no es cerrado hacia abajo (no cumple la propiedad 3).

2. $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > -1\}$.

   Solución: Note que todo $x \in \mathbb{Q}$ satisface que $x^2 + 1 > 0$, es decir, $x^2 > -1$. Luego $B = \mathbb{Q}$, y por lo tanto, no puede ser una cortadura.

3. $E = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = p\}$, con p un número primo.

   Solución: Recuerde del curso de teoría de números que no existe ningún racional x tal que $x^2 = p$, con p primo. Luego $E = \phi$, y no puede ser una cortadura.

4. $C = 0^* \cup \{1\}$.

   Solución: C no puede ser cortadura, porque tiene máximo. En efecto, 1 es el máximo de C, ya que $1 \in C$ y $1 > q$, para todo $q \in 0^*$, pues $q < 0$.

5. El complemento del conjunto $\{p \in \mathbb{Q} : p \geq \frac{2021}{2020}\}$.

   Solución: Sí, pues el complemento de $\{p \in \mathbb{Q} : p \geq \frac{2021}{2020}\}$ es $\{p \in \mathbb{Q} : p < \frac{2021}{2020}\} = (\frac{2021}{2020})^*$, y en clases ya se demostró que estos conjuntos son cortaduras.

6. $D = r^* \cup h^*$; con $r, h \in \mathbb{Q}$.

   Solución: Sí, y afirmamos que:

$$r^* \cup h^* = \begin{cases} r^* & si \quad h < r \\ r^* & si \quad r = h \\ h^* & si \quad h > r \end{cases}$$

   Es decir, cualquiera sea el caso, $r^* \cup h^*$ es una cortadura.
   Supongamos primero que $h < r$, y demostremos que $r^* \cup h^* = r^*$ por doble contención.
   Es claro que $r^* \subset r^* \cup h^*$.
   Sea $x \in r^* \cup h^*$ (por demostrar que $x \in h^*$). Entonces hay 2 opciones: $x \in r^*$ ó h^*.
   Si $x \in h^*$, entonces está demostrado lo que queríamos. Por otro lado, si $x \in r^*$, entonces por definición:

$$x < r < h \implies x < h \implies x \in h^*$$

   Por lo tanto, $r^* \cup h^* = h^*$.
   Supongamos ahora que $r = h$. Luego es claro que $r^* = h^*$, por lo que

$$r^* \cup h^* = r^* \cup r^* = r^*$$

   El tercer caso es análogo al primero.

Ejercicio 2: Demuestre que el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2021 \wedge x \geq 0\} \cup 0^*$ es una cortadura de Dedekind.

Solución:

1. $A \neq \phi$, pues $-1 \in A$.
2. $A \neq \mathbb{Q}$ ya que $2022^2 > 2021$ y $2022 > 0$, por lo que $2022 \notin A$.

3. Mostremos que A es cerrado hacia abajo.
Sea $x \in A$ e $y < x$. Podemos ver 2 casos:

Caso 1: Si $x \in 0^*$, entonces $y < 0$. Por tanto, $y \in 0^*$, y luego $y \in A$.

Caso 2: Supongamos ahora que $x^2 < 2021$ y $x \geq_{\mathbb{Q}} 0$. Note que podemos suponer $y \geq 0$, ya que si $y < 0$, se obtiene que $y \in A$. Entonces $y^2 < x^2$, y como $x^2 < 2021$, se tiene que $y^2 < 2021$. Por lo tanto que $y \in A$.

4. Mostremos ahora que A no tiene máximo. Sea $x \in A$, y al igual que antes, tenemos 2 casos:

Caso 1: Si $x \in 0^*$, entonces note que $y_x := \frac{x}{2}$ satisface que $y_x = \frac{x}{2} > x$ (ya que $x < 0$).

Caso 2: Si $x^2 < 2021$ y $x \geq_{\mathbb{Q}} 0$ entonces construiremos algún $y_x \in A$ tal que $y_x > x$. Para ello hacemos un borrador:

Borrador: Supongamos que el número que queremos construir tiene la forma $y_x = x+\delta$, con $\delta > 0$. Si tiene esta forma, entonces inmediatamente tendremos que $y_x = x+\delta > x$. Ahora veamos que condición tiene que cumplir δ para que $y_x \in A$. Queremos que:

$$\begin{aligned} y_x^2 = (x+\delta)^2 &< 2021 \\ \implies x^2 + 2x\delta + \delta^2 &< 2021 \end{aligned}$$

Para encontrar algún δ que nos sirva, supongamos que $\delta < 1$ (y luego $\delta^2 < \delta$). Entonces la condición nos queda como:

$$x^2 + 2x\delta + \delta^2 < x^2 + 2x\delta + \delta < 2021$$

Como $2x + 1 > 0$, ya que $x \geq 0$, al despejar δ nos queda que:

$$\delta < \frac{2021 - x^2}{2x+1}$$

Así, para que $y_x \in A$, debemos tener que $\delta < 1$ y $\delta < \frac{2021x^2}{2x+1}$ (note que $\frac{2021-x^2}{2x+1} > 0$, pues $x^2 < 2021$ y $x \geq 0$), por lo que nos basta escoger algún $\delta < \text{mín}\{1, \frac{2021-x^2}{2x+1}\}$.

Con el borrador en mano, para $x^2 < 2021$ y $x \geq_{\mathbb{Q}} 0$, podemos escoger $y_x = x + \delta$, con $0 < \delta < \text{mín}\{1, \frac{2021-x^2}{2x+1}\}$. Claramente $x < y_x$. Además:

$$(x+\delta)^2 = x^2 + 2x\delta + \delta^2$$

Como $\delta < 1$, entonces $\delta^2 < \delta$, por lo que:

$$x^2 + 2x\delta + \delta^2 < x^2 + 2x\delta + \delta$$

Además, como $\delta < \frac{2021-x^2}{2x+1}$:

$$(x+\delta)^2 < x^2 + 2x\delta + \delta < x^2 + \delta(2x+1) < x^2 + \frac{2021 - x^2}{2x+1}(2x+1) = 2021$$

Por lo tanto, existe $y_x = x + \delta \in A$ y $x < y_x$, con $0 < \delta < \text{mín}\{1, \frac{2021-x^2}{2x+1}\}$.

3. Rayados