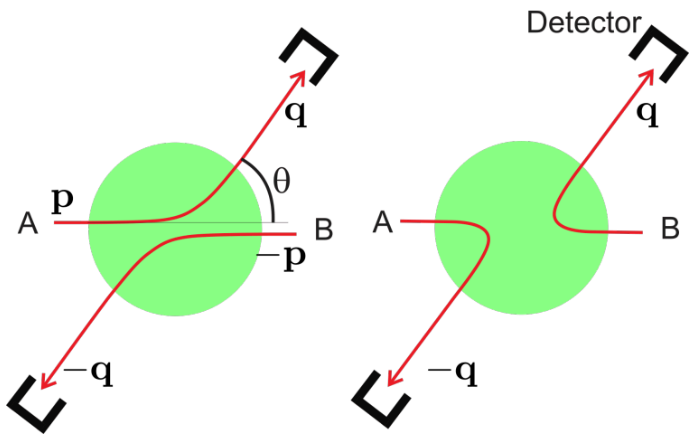
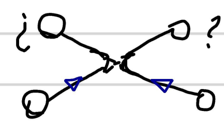


Figura: Caso descriptivo de la interacción de dos partículas idénticas, con y sin intercambio durante la interacción. Las dos posibilidades son indistinguibles.

PARTÍCULAS IDÉNTICAS

5.1. Indistinguibilidad y simetrización de funciones de onda

Partículas indistinguibles:



Si sus funciones de onda solapan o han solapado en el pasado, es imposible saber cuál es cuál.

En consecuencia, las funciones de onda:

$$\left.\begin{array}{l}\Psi_{12}(\vec{r},\vec{r}\,') \\ \Psi_{12}(\vec{r}\,';\vec{r})\end{array}\right\} \text{ son el mismo estado.}$$

$$\Longrightarrow \quad \Psi_{12}(\vec{r},\vec{r}\,') = e^{i\phi}\,\Psi_{12}(\vec{r}\,';\vec{r}) \qquad \forall\, \vec{r},\vec{r}\,'$$

Pero, entonces tendríamos:

$$\Psi_{12}(\vec{r}\,',\vec{r}) = e^{i\phi}\,\Psi_{12}(\vec{r},\vec{r}\,') = e^{i2\phi}\,\Psi_{12}(\vec{r}\,';\vec{r})$$

$$\Longrightarrow e^{i2\phi} = 1 \Longrightarrow 2\phi = \begin{cases} 0 \\ 2\pi \end{cases} \Rightarrow \phi = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$

Luego: $\quad \Psi_{12}(\vec{r},\vec{r}\,') = \pm\, \Psi_{12}(\vec{r}\,',\vec{r})$

En general, la función de onda de dos partículas indistinguibles debe ser simétrica o anti-simétrica.

Teorema espín-estadística:

Si S es entero: $P_{12}|\psi\rangle_{12} = +|\psi\rangle_{12}$ BOSONES

Si S es semi-entero: $P_{12}|\psi\rangle_{12} = -|\psi\rangle_{12}$ FERMIONES

Directorio de partículas fundamentales		
Fermiones	Quarks (s=1/2)	u, d, s, c, b, t
	Leptones (s=1/2)	e $,\nu_e,$ μ $,\nu_\mu,$ τ $,\nu_{tau}$
Bosones	s=1	γ(ED), Z^0(ED), $W^{\pm}$(ED), g(F)
	s=2	G(GR)

Cuadro 3.1.: Partículas elementales conocidas (exceptuando el gravitón). Todos los fermiones tienen su antipartícula correspondiente. Algunas partículas se conocen simplemente como una letra: *quarks* u y d, bosones Z^0 y $W^{\pm}$. Otras tienen nombre propio: μ = muón, τ = tauón, ν_e = neutrino electrónico,... γ = fotón, g = gluón, G = gravitón. En el caso de las partículas portadoras hemos añadido entre paréntesis la interacción con la que están relacionadas. **EM** = int. electromagnética , **ED** = int. electrodébil, **F** = int. fuerte, **GR** = int. gravitatoria.

- **Fermiones:** el protón, el núcleo $^3He_2$, etc.
- **Bosones:** piones $\pi^0, \pi^{\pm}$, el núcleo $^4He_2$ (partícula α), el átomo de He, etc.

Todo lo anterior implica que el espacio de estados de un sistema compuesto por dos partículas indistinguibles no es $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, sino un subespacio más restringido. Definimos:

$$\mathcal{H}_S = \{ |\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 : P_{12}|\psi\rangle = +|\psi\rangle \}$$ estados simétricos

$$\mathcal{H}_A = \{ |\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 : P_{12}|\psi\rangle = -|\psi\rangle \}$$ estados antisimétricos.

Ambos son subespacios vectoriales (espacios de Hilbert) y son obviamente invariantes bajo P_{12}.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Para bosones:} & |\psi\rangle \in \mathcal{H}_S \\ \text{Para fermiones:} & |\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \end{array}\right\} \text{estados admisibles}$$

$\mathcal{H}_S$ y $\mathcal{H}_A$ son considerablemente más "pequeños" que $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

El hamiltoniano de dos partículas indistinguibles debe ser invariante bajo permutaciones:

$$[H, P_{12}] = 0$$ demostracion: ejercicio

Entonces: 1) La evolución conserva la simetría, es decir, $|\psi(t)\rangle$ permanece en $\mathcal{H}_S$ o $\mathcal{H}_A$.

2) Se puede construir una base propia de H en $\mathcal{H}_S$ ó $\mathcal{H}_A$

Construcción de una función de onda simétrica

|sim> = |a> |b> + |b> |a>
|antisim> = |a> |b> — |b> |a>

si los estados a y b son identicos, a = b
y
|antisim> = |a> |a> — |a> |a> = 0

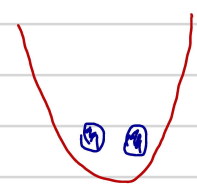
Luego: **dos fermiones idénticos no pueden estar en el mismo estado cuántico.**

Principio de exclusión de Pauli.

Ejemplos

a) Dos bosones independientes en un pozo armónico:

$$H = \underbrace{H_1 + H_2}_{H_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_2} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x_1^2 + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x_2$$



Las funciones de onda son funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{C}$, $\psi(x_1, x_2)$. El estado fundamental de un sólo oscilador es:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \quad \text{con energía } E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$

El estado fundamental del sistema será la simetrización de $\psi_0(x_1)\psi_0(x_2)$, que es:

$$\psi(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2 + x_2^2)\right]$$

y su energía es: $\langle H \rangle_\psi = 2E_0 = \hbar\omega$

b) Dos fermiones:

El estado fundamental es la antisimetrización de:

$$\psi_0(x_1)\,\psi_1(x_2) \quad \text{con} \quad \psi_1(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} \times e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$$

$$\psi(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \cdot \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} \left[x_1 - x_2\right] \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_1^2+x_2^2)\right]$$

y tiene energía $\langle H\rangle_\psi = \frac{\hbar\omega}{2} + \left(1+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega = 2\hbar\omega$ ← el doble que para bosones

Pero, si tenemos en cuenta el espín (p. ej.: ½):

$$\psi(x_1,x_2) = \psi_0(x_1)\cdot\psi_0(x_2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2\right]$$

↑ singlete

y la energía es $\langle H\rangle_\psi = 2E_0 = \hbar\omega$

3) Estado fundamental del átomo de helio

Los dos electrones son fermiones. Si despreciamos la energía de repulsión entre ellos, el estado fundamental es:

$$\psi_{100}(\vec{r}_1)\,\psi_{100}(\vec{r}_2)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2\right]$$

En donde $\psi_{n\ell m}(\vec{r})$ son los orbitales del átomo de hidrógeno (con 2 protones en el núcleo):

$$\psi_{100}(\vec{r}) = 2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-\frac{Zr}{a_0}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

con $Z=2$ y $a_0 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$

N particulas identicas

El principio de exclusión de Pauli sigue siendo válido:

Construcción de funciones de onda simétricas y antisimétricas:

$$|\psi\rangle_S = \mathcal{N} \sum_{\sigma} P_\sigma |\psi\rangle$$ (la suma incluye $\sigma = \mathbb{1}$)

$$|\psi\rangle_A = \mathcal{N} \sum_{\sigma} \pi(\sigma) P_\sigma |\psi\rangle$$

Si $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle_1 \otimes |\psi_2\rangle_2 \otimes |\psi_3\rangle_3 \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle_N$

$$|\psi\rangle_A = \mathcal{N} \begin{vmatrix} |\psi_1\rangle_1 & |\psi_2\rangle_1 & \dots & |\psi_N\rangle_1 \\ |\psi_1\rangle_2 & |\psi_2\rangle_2 & \dots & |\psi_N\rangle_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ |\psi_1\rangle_N & |\psi_2\rangle_N & \dots & |\psi_N\rangle_N \end{vmatrix}$$

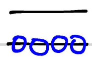
Determinante de SLATER

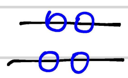
Recordemos la diferencia entre niveles de energía y estados propios del hamiltoniano.

Un nivel ε_ℓ con degeneración g_ℓ contiene g_ℓ estados linealmente independientes.

Ejemplo:

4 partículas en dos niveles $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$, doblemente degenerado. Estado fundamental:

Bosones  con energía $4\varepsilon_0$

Fermiones:  con energía $2(\varepsilon_0+\varepsilon_1)$