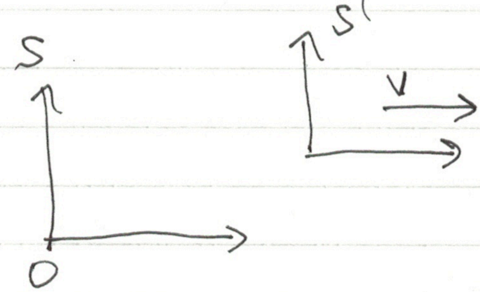
Sist. inercial: sist. de ref. donde un objeto libre de fuerzas externas, se mueve con veloc. constante.

Principio de relatividad Newtoniana:

Leyes de la mecánica son las mismas en todos los sist. inerciales → ya notado por Galileo.

Ec. de transf. Galileanas



$$\left.\begin{aligned}
x' &= x - vt \quad (y\ x = x' + vt)\\
y' &= y\\
z' &= z\\
t' &= t\\
u_x' &= u_x - v \quad (y\ u_x = u_x' + v)\\
a_x' &= a_x
\end{aligned}\right\}\quad (1)$$

Sea F la fuerza entre 2 cuerpos, sup. $F_{12} = f(x_2 - x_1)$

En el sist. S, $f(x_2 - x_1) = m_2 a_2$ (2)

En el sist. S', tenemos $F'_{12} \equiv f(x_2' - x_1')$ (2')

$= f(x_2 - vt - (x_1 - vt)) = f(x_2 - x_1) = F_{12}$ (3)

por otro lado, $m_2' = m_2$ (escalar)

y $a_2' = a_2$

$\therefore$ (2') queda $f(x_2' - x_1') = m_2' a_2'$

o sea $\boxed{F_{12}' = m_2' a_2'}$ (3')

ley de mov. Newtoniana es inalterada por la T. G.

Lo anterior NO ocurriría si $F_{12} = f(x_2^2 - x_1^2)$ por ej.
(observado)
sin embargo, NO se han hallado fuerzas de este tipo en la naturaleza.

Einstein y el tiempo: tiempo es lo que mide un reloj

- reloj mecánico
- Rotación de la tierra
- haz de moléculas de amoníaco en un MASER
- cristal de cuarzo
- una población de partículas radioactivas
- El pulso

Postulados de Einstein

(1) Todos los sist. inerciales son equivalentes c/r a todas las leyes de la física

(2) La veloc. de la luz en el vacío siempre tiene el mismo valor c.

Evidencia de consistencia

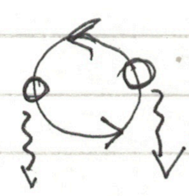
(i) El exp. de Michelson – Morley

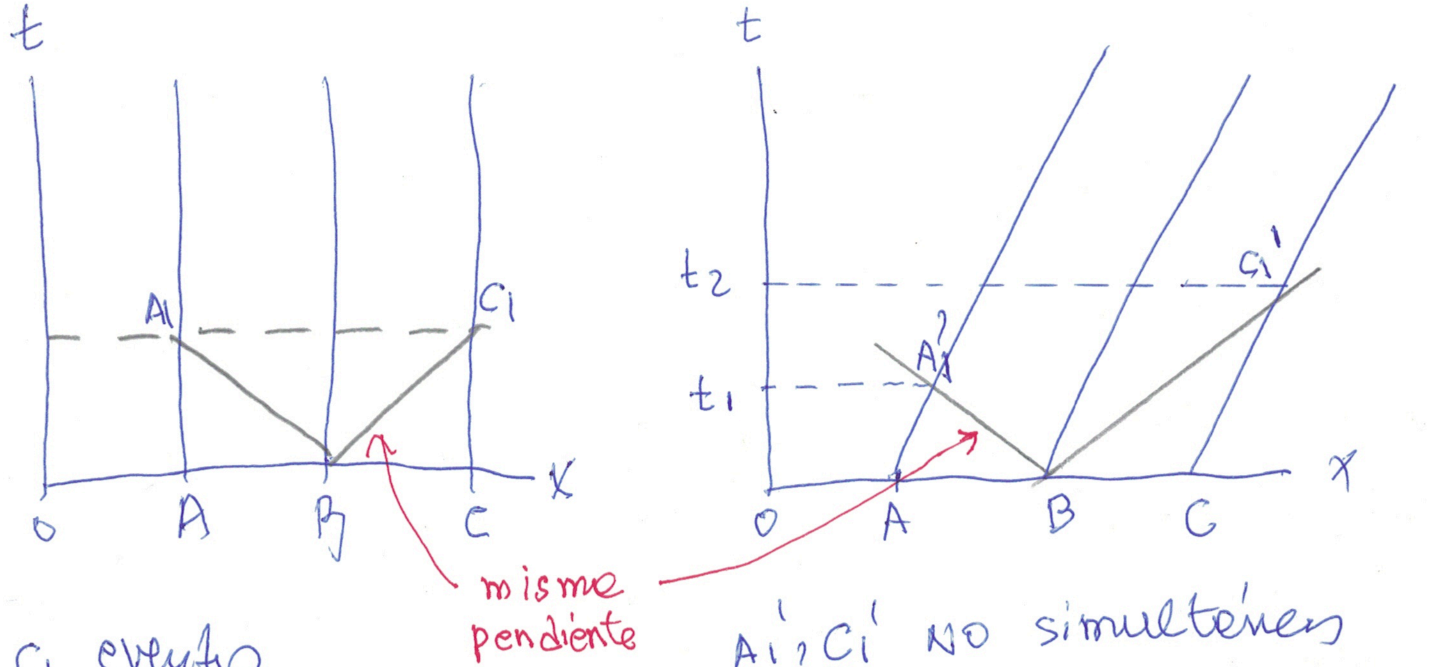
(ii) El exp. de Kennedy – Thorndike (1932)

- Diferentes longs. para los brazos del interferómetro
- El aparato estuvo fijo en el lab., y se observaron las franjas de interferencia durante varios meses

→ No se observó ningún corrimiento

(iii) Mov. aparente de estrellas binarias





A1, C1 eventos simultáneos

A1', C1' NO simultáneos en S

eq. entre sists. inerciales ⟹ A1' y C1' son simultáneos en S

simultaneidad depende del sist. de referencia usado

Ec. de transformación (entre S y S')

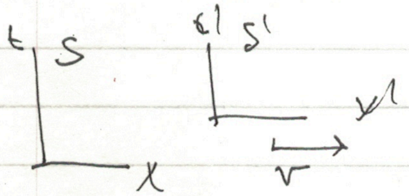
$x' = L_1(x,t)$

$t' = L_2(x,t)$

L_1, L_2 funcs. LINEALES (Debido a que un obj. a veloc. cte. en S, debiera también tener veloc. cte. en S')

$$x = ax' + bt' \quad \text{con} \quad x' = ax - bt$$

debe reducirse al caso Galileano a bajas velocidades



$$x = 0 \Rightarrow ax' + bt' = 0 \Rightarrow ax' + bt' = 0 \Rightarrow \frac{x'}{t'} = -\frac{b}{a} = \boxed{-v}$$ ← vel de S

$$x' = 0 \Rightarrow ax - bt = 0 \Rightarrow ax = bt \rightarrow \frac{x}{t} = \frac{b}{a} = \boxed{v}$$

veloc. de S'

$$\boxed{v = b/a}$$

Si una señal de luz se origina en el origen de S: $x = ct$

Desde S': $x' = ct'$

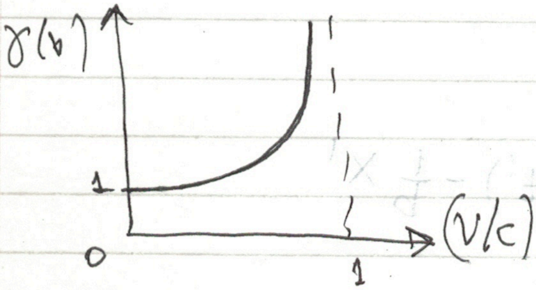
$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} ct &= act' + bt' \\ ct' &= act - bt \end{aligned}} \Rightarrow ct' = c\left(a - \frac{b}{c}\right)t = ca\left(1 - \frac{v}{c}\right)t$$

$$ct = (ac+b)t' = (ac+b)a\left(1 - \frac{v}{c}\right)t = a^2(c+v)\left(1 - \frac{v}{c}\right)t$$

$$= a^2c\left(1 + \frac{v}{c}\right)\left(1 - \frac{v}{c}\right)t = a^2ct\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{1}{1-(v/c)^2} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}}$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow x &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}(x'+vt') = \gamma(x'+vt') \\ x' &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}(x-vt) = \gamma(x-vt) \\ \text{donde } &\gamma(v) \equiv \left(1-(v/c)^2\right)^{-1/2} \end{aligned}\right\} \text{Transf. de Lorentz}$$



Ejercicio: dadas las T. de L, obtenga

$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right).$$

Para las demás coordenadas, $y' = y$
$z' = z$

T. de los tiempos

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$\Rightarrow vt' = x\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right) + \gamma v t$$

pero, $\frac{1}{\gamma} - \gamma = \sqrt{1-\beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\quad (\beta \equiv v/c)$

$$= \frac{-\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\beta^2\gamma$$

$$\Rightarrow vt' = \gamma v t - \beta^2 \gamma x = \gamma(vt - \beta^2 x)$$

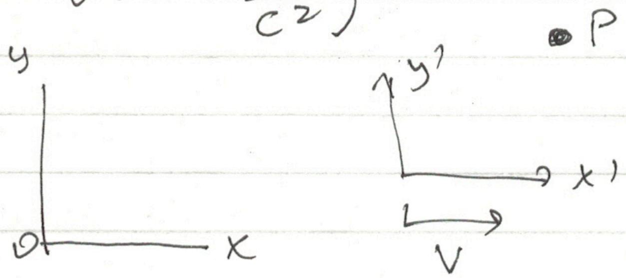
$$t' = \gamma\left(t - \frac{1}{v}\left(\frac{v}{c}\right)^2 x\right)$$

$$\therefore \boxed{t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)}$$

Transf. de velocidade

$x = \gamma (x' + vt')$; $y = y'$

$t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$



em S': $u_x' = \frac{dx'}{dt'}$; $u_y' = \frac{dy'}{dt'}$

$dx = \gamma (dx' + v\,dt')$

$dt = \gamma \left(dt' + \frac{v}{c^2} dx'\right)$

$\Rightarrow u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v\,dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = \frac{\cancel{dt'}(u_x' + v)}{\cancel{dt'}\left(1 + \frac{v u_x'}{c^2}\right)}$

$\therefore \boxed{u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}}} \Rightarrow \boxed{u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}}$

$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma\left(dt' + \frac{v}{c^2} dx'\right)} = \boxed{\frac{u_y'/\gamma}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}}}$

$\Rightarrow \boxed{u_y' = \frac{u_y/\gamma}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}}$

igual para u_z'

EX': $u_x' = v = 0.5c$

$$u_x = \frac{0.5c + 0.5c}{1 + (0.5)^2} = \frac{4}{5}c$$

En gral, si $v = \beta_1 c$ y $u_x' = \beta_2 c$ $(0 \leq \beta_1, \beta_2 < 1)$

$$\Rightarrow \frac{u_x}{c} = \beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2}$$

$$\Rightarrow 1 - \beta = 1 - \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{1 + \beta_1\beta_2} = \frac{1 + \beta_1\beta_2 - \beta_1 - \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} = \frac{(1-\beta_1)(1-\beta_2)}{1 + \beta_1\beta_2}$$

o sea si $0 < \beta_1 < 1$ y $0 < \beta_2 < 1$ $\Rightarrow$ 1- beta > 0 —> beta <1

siempre.

En (S) se obs. q' un evento tomo lugar en A sobre eje x y 10^{-6} s después otro evento ocurre en B, loc. a 900 m de A.
Hallar magnitud y dirección de (S') c/r a (S) tq. ambos eventos aparezcan simultáneos.

A: $t_A = 0$, $x_A = 0$
B: $t_B = 10^{-6}$ s, $x_B = 900$ m

$$t_A' = \gamma\left(t_A - \frac{v x_A}{c^2}\right)$$

$$t_B' = \gamma\left(t_B - \frac{v x_B}{c^2}\right)$$

$$\underbrace{t_B' - t_A'}_{0} = \gamma(t_B - t_A) - \frac{\gamma v}{c^2}(x_B - x_A)$$

$$t_B - t_A = \frac{v}{c^2}(x_B - x_A) \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{c(t_B - t_A)}{x_B - x_A} = \frac{1}{3}$$

Eventos

Evento 1: $x_1' = \gamma(x_1 - v t_1)$ $\qquad$ $x_1 = \gamma(x_1' + v t_1')$

$t_1' = \gamma(t_1 - \frac{v}{c^2} x_1)$ $\qquad$ $t_1 = \gamma(t_1' + \frac{v}{c^2} x_1')$

Evento 2: $x_2' = \gamma(x_2 - v t_2)$ $\qquad$ $x_2 = \gamma(x_2' + v t_2')$

$t_2' = \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2} x_2)$ $\qquad$ $t_2 = \gamma(t_2' + \frac{v}{c^2} x_2')$

luego,

$$x_2' - x_1' = \gamma[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)]$$
$$t_2' - t_1' = \gamma[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)]$$

EX: sist. S' tiene veloc. v $= 0{,}6c$ c/r a S. Se ajustan los relojes t.q. $t = t' = 0$ cuando $x = x' = 0$.

evento 1 ocurre en $x_1 = 10m$, $t_1 = 2 \times 10^{-7}$ secs $(y_1 = 0 = z_1)$

evento 2 ocurre en $x_2 = 50m$, $t_2 = 3 \times 10^{-7}$ secs, $(y_2 = 0 = z_2)$

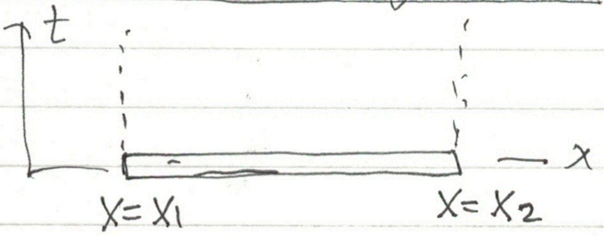
¿cuál es la distancia entre ambos eventos, medidos en S'?

$(v/c)^2 = (9/25) \Rightarrow \gamma = (1 - (v/c)^2)^{-1/2} = 5/4$

$\Rightarrow x_2' - x_1' = \frac{5}{4}[(50-10) - (\frac{3}{5}) 3\times10^8 (3-2) 10^{-7}] = 27.5$ (m).

Contracción de longitudes

sist. S:



$l = x_2 - x_1$ (en el sist. en reposo)

¿cuál es la long. de la barra medida en otro sist. s'?

→ medir las posiciones de ambos extremos (x_1' y x_2') al mismo tiempo t' (medido en s')

$$l' = x_2' - x_1'$$

sabemos
$$x_1 = \gamma(x_1' + vt')$$
$$x_2 = \gamma(x_2' + vt')$$

$$\Rightarrow \underbrace{x_2 - x_1}_{l} = \gamma(\underbrace{x_2' - x_1'}_{l'}) \Rightarrow l' = \frac{l}{\gamma} = l\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} < l$$

<u>Dilatación del tiempo</u>: Sup. un reloj en reposo en $x = x_0$ en S.

evento 1: (x_0, t_1) "TIC"
evento 2: (x_0, t_2) "TAC"

¿Cómo se ve esto desde s'?

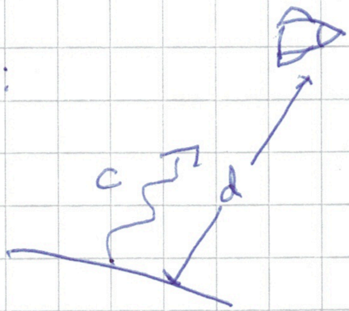
$$\left.\begin{aligned} t_1' &= \gamma\left(t_1 - \frac{vx_0}{c^2}\right) \\ t_2' &= \gamma\left(t_2 - \frac{vx_0}{c^2}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{t_2' - t_1'}_{\Delta\tau'} = \gamma(t_2 - t_1)$$

$$\Delta\tau' = \gamma\,\Delta\tau > \Delta\tau$$

⇒ reloj parece correr "más lento" al ser observado desde s'.

Una nave se aleja de la T a $v = 0.8c$. Cuando se encuentra a una distancia $d = 6{,}66 \times 10^8$ km, se le envía una señal de radio desde la T ¿cuánto tarda en llegar la señal, medido en ambos sist. de referencia? ¿cuál es la posición de la nave cuando recibe la señal, en ambos sist. de referencia?

Sistema tierra (S):



$$ct = d + vt$$
$$(c-v)t = d$$
$$\boxed{t = \frac{d}{c-v}}$$

y la posición será $ct = \boxed{\frac{dc}{c-v}} = x$

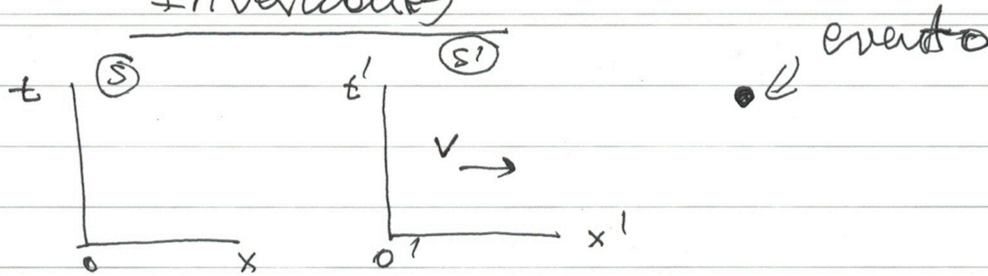
Sistema nave (S'): transformamos $(x,t) \rightarrow (x',t')$
evento

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) = \gamma\left[\frac{d}{c-v} - \frac{v \cdot dc}{c^2(c-v)}\right] = \frac{\gamma}{c-v}\left(d - \frac{v}{c}d\right)$$

$$= \frac{\gamma d}{c-v}\left(1-\frac{v}{c}\right) = \frac{\gamma d}{c\cancel{(1-\frac{v}{c})}}\cancel{\left(1-\frac{v}{c}\right)} = \boxed{\frac{\gamma d}{c}}$$

$$x' = 0$$

Invariantes



$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$t' = \gamma(t - vx/c^2)$$

Evaluemos: $(ct')^2 - (x')^2$

$$= \gamma^2\left(ct - \frac{vx}{c}\right)^2 - \gamma^2(x - vt)^2$$

$$= \gamma^2\left[c^2t^2 + \frac{v^2x^2}{c^2} - 2vxt\right] - \gamma^2\left[x^2 + v^2t^2 - 2xvt\right]$$

$$= \gamma^2\left[c^2t^2 + \frac{v^2x^2}{c^2} \cancel{-2vxt} - x^2 - v^2t^2 \cancel{+2vxt}\right]$$

$$= \gamma^2\left[(c^2 - v^2)t^2 - x^2\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)\right] = \gamma^2\left[c^2\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)t^2 - x^2\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)\right]$$

$$= \cancel{\gamma^2\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}\left[(ct)^2 - x^2\right] = (ct)^2 - x^2$$

$$\therefore\ s^2 \equiv (ct')^2 - (x')^2 = (ct)^2 - x^2$$

INVARIANTE RELATIVISTA.

también: $\underbrace{E_0^2}_{\text{reposo}} \equiv \underbrace{E^2}_{\text{total}} - c^2p^2$

An observer on Earth observes two spacecraft moving in the *same* direction toward the Earth. Spacecraft A appears to have a speed of $0.50c$, and spacecraft B appears to have a speed of $0.80c$. What is the speed of spacecraft A measured by an observer in spacecraft B?

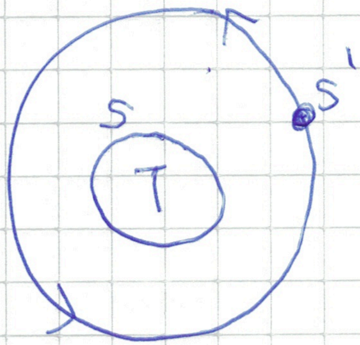
En gral, $\vec{v}_A = \dfrac{\vec{v}_B + \vec{v}_A'}{1 + \frac{\vec{v}_A' \cdot \vec{v}_B}{c^2}} \Rightarrow$

$\vec{v}_A' = \dfrac{\vec{v}_A - \vec{v}_B}{1 - \frac{\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B}{c^2}}$. In our case $\vec{v}_A = -0.5c\,\hat{i}$

$\vec{v}_B = -0.8c\,\hat{i}$

$\Rightarrow v_A' = \dfrac{-0.5c - (-0.8c)}{1 - (-0.5)(-0.8)} = \boxed{0.5c}$

In 1962, when Scott Carpenter orbited Earth 22 times, the press stated that for each orbit he aged 2 millionths of a second less than if he had remained on Earth. (a) Assuming that he was 160 km above Earth in an eastbound circular orbit, determine the time difference between someone on Earth and the orbiting astronaut for the 22 orbits. (b) Did the press report accurate information? Explain.



$$\Delta\tau = \tau - \tau' = \tau - (1/\gamma)\tau = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\tau$$

$$\tau \approx \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{R/g} \qquad (1)$$

$$\frac{GmM}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR} \qquad (0)$$

$$\gamma = \left(1 - (v/c)^2\right)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}(v/c)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\gamma} \simeq 1 - \frac{1}{2}(v/c)^2 \Rightarrow 1 - \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{2}(v/c)^2$$

$$\Rightarrow \Delta\tau = \cancel{2}\pi\sqrt{R/g}\,\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \overset{(0)}{=} \frac{\pi R^{3/2} g^{1/2}}{c^2} \qquad (2)$$

$R = 6400$ km
$g = 9.8$ m/s

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\tau \approx 1.78\,\mu s}$$