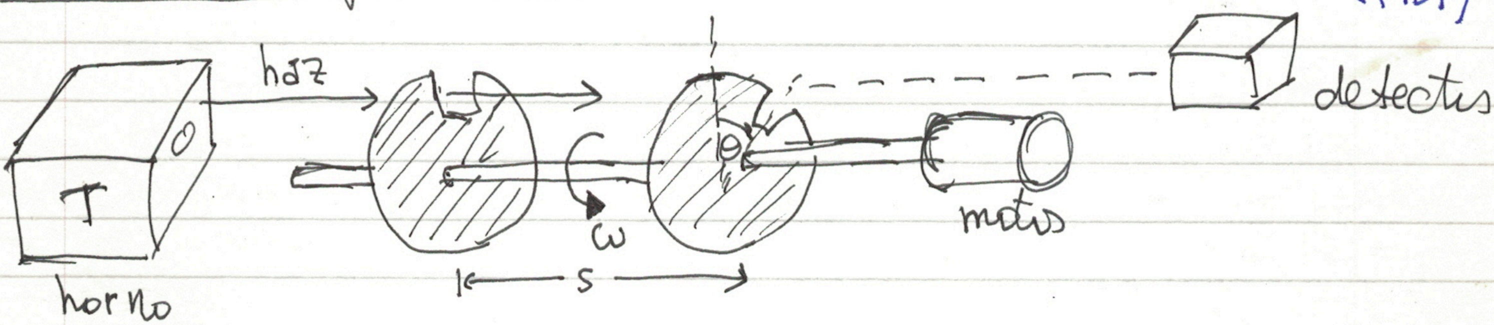
<u>comprobac. experimental</u> (J.F. Zartman, 1931) PR <u>37</u>, 383-39 (1931)



para ω dado, sólo pasan al detector aquellas moléculas que cumplan: $t = \frac{s}{v} = \frac{\theta}{\omega}$

$\Rightarrow v = \frac{s\theta}{\omega}$. Variando ω ó θ, se puede medir directa/. el # de moléculas en un <u>rango de v dado</u>.

Los resultados concuerdan con **M-B**

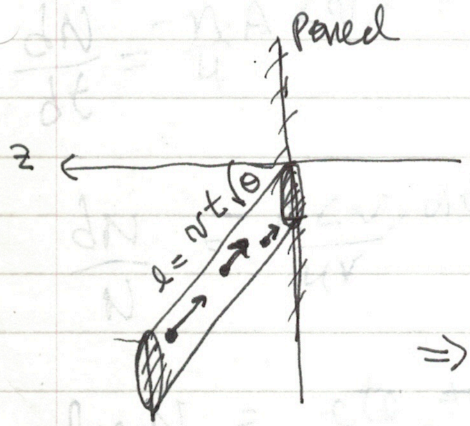
Ejercicio: Dado **M-B** calcular como fn de T:

(a) $\bar{v}$ (rapidez promedio) $= \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}$

(b) rapidez más probable v_{mp}

(c) veloc. cuadrática media: $\sqrt{\overline{v^2}}$

Calcular la tasa de escape de moléculas desde una pequeña abertura de área A, en un contenedor.



$$\Delta N = n A v t \cos\theta \, f(\vec{v})$$

$$\frac{\Delta N}{A\Delta t} = n \, v \cos\theta \, f(\vec{v})$$

$$\Rightarrow \text{flujo} = \int n v \cos\theta \, f(\vec{v}) \, d^3v$$

$$= n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \iiint e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^3 \cos\theta \sin\theta \, dv \, d\theta \, d\phi$$

$$= 2\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \, d\theta}_{1/2} \underbrace{\int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv}_{\cancel{1/(2m/2kT)^2} \;\; 2\left(\frac{kT}{m}\right)^2} = n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$$

$$= \frac{n}{4}\bar{v} \quad (12$$

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{n}{4} A \langle v \rangle = -\frac{NA}{4V} \langle v \rangle$$

$$\frac{dN}{N} = -\frac{A \langle v \rangle}{4V} dt$$

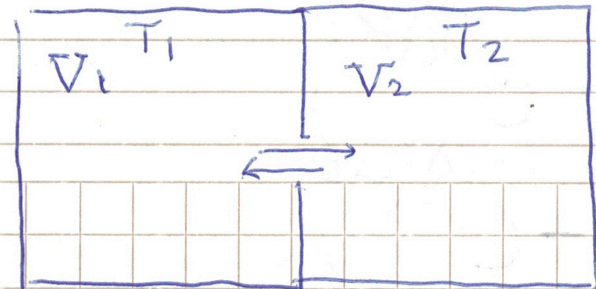
$$\ln N = cte + \frac{A \langle v \rangle t}{4V}$$

$$\boxed{N = N(0)\, e^{-\frac{A \langle v \rangle t}{4V}}}$$

$$P = P(0)\, e^{-\frac{A \langle v \rangle t}{4V}}$$

$$\boxed{P = P(0)\, e^{-\frac{A}{V}\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}\, t}}$$

Ej: calc. tiempo de vaciado.



$$\frac{dN_1}{dt} = -A_1\left(\frac{N_1}{V_1}\right)\frac{\langle v\rangle_1}{4} + A_2\left(\frac{N_2}{V_2}\right)\frac{\langle v\rangle_2}{4}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = -A_2\left(\frac{N_2}{V_2}\right)\frac{\langle v\rangle_2}{4} + A_1\left(\frac{N_1}{V_1}\right)\frac{\langle v\rangle_1}{4}$$

Sup: $A_1 = A_2$, $V_1 = V_2$ y $T_1 = T_2$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \dot{N}_1 = -\alpha N_1 + \alpha N_2 \\ \dot{N}_2 = \alpha N_1 - \alpha N_2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} N_1(0) = N_0 \\ N_2(0) = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \dot{N}_1 + \dot{N}_2 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(N_1 + N_2) = 0 \Rightarrow \boxed{N_1 + N_2 = N_0} \quad (1)$$

$$\Rightarrow N_2 = N_0 - N_1$$

$$\Rightarrow \dot{N}_1 = -\alpha N_1 + \alpha(N_0 - N_1)$$
$$= -2\alpha N_1 + \alpha N_0$$

$$\frac{d}{dt}N_1 = \alpha N_0 - 2\alpha N_1 \Rightarrow N_1 = \frac{N_0}{2} + A e^{-2\alpha t}$$

y usando $N_1(0) = N_0 \Rightarrow \boxed{N_1(t) = \frac{N_0}{2}\left(1 + e^{-2\alpha t}\right)}$

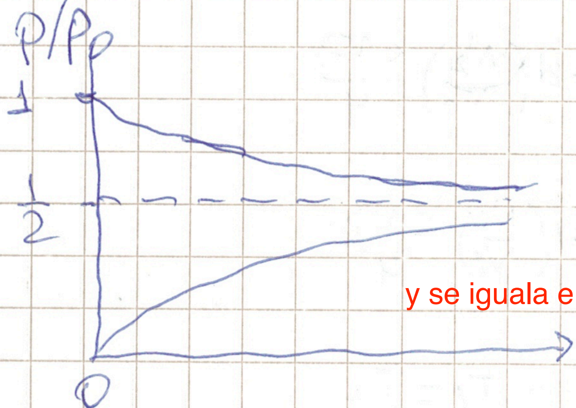
$$N_2 = N_0 - N_1 = N_0 - \frac{N_0}{2} - \frac{N_0}{2}e^{-2\alpha t} = \frac{N_0}{2} - \frac{N_0}{2}e^{-2\alpha t}$$

$$\Rightarrow \boxed{N_2(t) = \frac{N_0}{2}\left(1 - e^{-2\alpha t}\right)}$$

$\longrightarrow$

$$\Rightarrow P_1(t) = \frac{P_1(0)}{2}\left(1 + e^{-\frac{2A\langle v\rangle t}{4V}}\right)$$

$$P_2(t) = \frac{P_1(0)}{2}\left(1 + e^{-\frac{2A\langle v\rangle t}{4V}}\right)$$



se equilibran las presiones

y se iguala el numero de particulas en ambos containers

ejercicios

1. (a) Suponiendo que las moléculas de Hidrógeno tienen una velocidad cuadrática media (rms) de 1,270 m/s a 300 K, calcule la rms a 600 K.
(b) Estime la temperatura a la cual la velocidad cuadrática media de las moléculas de nitrógeno en la atmósfera es igual a la velocidad de escape del campo gravitacional de la Tierra. (masa atómica Nitrógeno=14, radio Tierra=6,400 km).

2. Un sistema posee niveles de energía no-degenerados con energia $E = (n + 1/2)\hbar\omega$, donde $\hbar\omega = 8.625 \times 10^{-5}$ev, y $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.
(a) Calcule la probabilidad P_{10} de que el sistema esté en el estado $n = 10$ si esta en contacto con un baño térmico a temperatura ambiente ($T = 300K$).
(b) Cual será la probabilidad P_{10} en los casos límites de temperatura muy bajas y muy altas?
(c) A que temperatura se maximizara P_{10}? Para tal temperatura calcule P_{10}.

[1] (a) $V_{rms} = \sqrt{\langle V^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3KT}{m}}$

$V_1 = \sqrt{\frac{3KT_1}{m}}$

$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{3KT_1}{\cancel{m}}} \cdot \sqrt{\frac{\cancel{m}}{3KT_2}} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$

$V_2 = \sqrt{\frac{3KT_2}{m}}$

$\Rightarrow V_2 = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} V_1 = \sqrt{\frac{600}{300}} \times 1{,}270 = \boxed{1{,}796 \left[\frac{m}{s}\right]}$

[b) $v_{rms} = \sqrt{\frac{3KT}{m}}$

$\frac{1}{2}\cancel{m} V_e^2 = \frac{GM\cancel{m}}{R} \Rightarrow V_e^2 = \frac{2GM}{R} = 2R \underbrace{\left(\frac{GM}{R^2}\right)}_{g} = 2gR$

$v_{rms} = V_e \Rightarrow \left(\frac{3KT}{m}\right)^{1/2} = (2gR)^{1/2}$

$\Rightarrow \frac{3KT}{m} = 2gR \Rightarrow T = \frac{2mgR}{3K}$

$N_0 \to 14\,gr$
$1 \to x$ $\Rightarrow m = \frac{14}{6.02\times10^{23}} = 2.33\times10^{-23}\,gr.$

$T = \frac{2\times2.33\times10^{-23}\times980\times6.4\times10^{8}}{3\times1.38\times10^{-16}} = \boxed{70.597\ K}$

[2] $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega \qquad n = 0, 1, 2, \dots$

$$P_n = A e^{-\frac{(n+\frac{1}{2})\hbar\omega}{kT}} = A e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}} \cdot e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}$$

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} A e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}} \cdot e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}} = A e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}} \cdot \sum_{0}^{\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}$$

$$S = 1 + e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} + e^{-\frac{2\hbar\omega}{kT}} + \dots$$

$$e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} S = e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} + e^{-\frac{2\hbar\omega}{\hbar\omega}} + \dots$$

$$S(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}) = 1 \Rightarrow \boxed{S = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}}}$$

$$1 = \frac{A e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}} = \frac{A e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}}{e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1)} = \frac{A e^{\frac{\hbar\omega}{2kT}}}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = (e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1) e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}}$$

$$P_n = (e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1) e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}} \times e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}} e^{-n\frac{\hbar\omega}{kT}}$$

$$(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1) e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}} = (1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}) e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}$$

$$\frac{\hbar\omega}{kT} = \frac{1.0}{300} \qquad P_{10} = (1 - e^{-0.003}) e^{-\frac{10}{300}} = 0.00321$$

$$P_n = \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{KT}}\right) e^{-\frac{n\hbar\omega}{KT}}$$

$$T \to 0 \quad e^{-\frac{\hbar\omega}{KT}} \to 0 \quad y \quad e^{-\frac{n\hbar\omega}{KT}} \to 0 \text{ (excepto at } n=0)$$

$$\boxed{P_{10}(T \to 0) = 0}$$

$$T \to \infty, \quad e^{-\frac{\hbar\omega}{KT}} \to 1 \quad , \quad e^{-\frac{n\hbar\omega}{KT}} \to 1 \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{10}(T \to \infty) = 0}$$

$$P_n = (1-e^{-\beta})e^{-n\beta} \qquad \beta \equiv \frac{\hbar\omega}{KT}$$

$$P_{10} = (1-e^{-\beta})e^{-10\beta}$$

$$0 = \frac{dP_{10}}{dT} = \frac{d\beta}{dT}\cdot\frac{d}{d\beta}P_{10} = -\frac{\hbar\omega}{KT^2}\left\{ e^{-\beta}e^{-10\beta} + (1-e^{-\beta})(-10)e^{-10\beta} \right\}$$

$$= -\frac{\hbar\omega}{KT^2}e^{-10\beta}\left[e^{-\beta} + (1-e^{-\beta})(-10)\right]$$

$$= -\frac{\hbar\omega}{KT^2}e^{-10\beta}\left[e^{-\beta} - 10 + 10e^{-\beta}\right]$$

$$\left[11e^{-\beta} - 10\right]$$

$$\Rightarrow 11e^{-\beta} = 10 \Rightarrow e^{-\beta} = \frac{10}{11} \Rightarrow \qquad -\beta = \ln(10/11)$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \ln(11/10)}$$

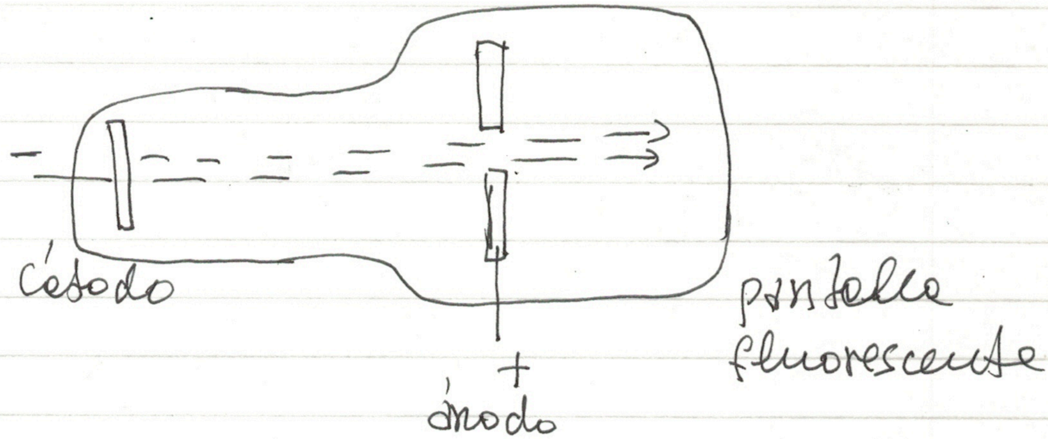
$$\therefore \frac{\hbar\omega}{KT} = \ln(11/10) \Rightarrow T = \frac{\hbar\omega}{K\ln(11/10)} = \frac{1}{\ln(11/10)} = \boxed{10.5}$$

$$P_{10} = (1-e^{-\beta})e^{-10\beta} = (1-e^{-\ln(11/10)})\,e^{-10\ln(11/10)} = \boxed{0.035}$$

$$\Rightarrow 3.5\%$$

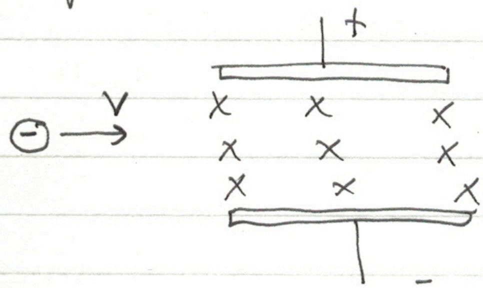
EL Electrón: "átomo" de electricidad

Rayos Catódicos:



rayos pueden deflectarse con $\vec{B}$.

J.J. Thompson (1897) midió e/m:



$$eVB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow \boxed{\frac{e}{m} = \frac{v}{RB}}$$

↓ F. Lorentz

se ajusta el $\vec{E}$ externo hasta lograr cero deflexión

$$\rightarrow eE = evB \Rightarrow \boxed{v = E/B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{e}{m} = \frac{E}{RB^2}} \simeq 10^8 \ C/gr$$

Grande comparado con $\left(\frac{e}{m}\right)_H = 96500 \ C/gr.$

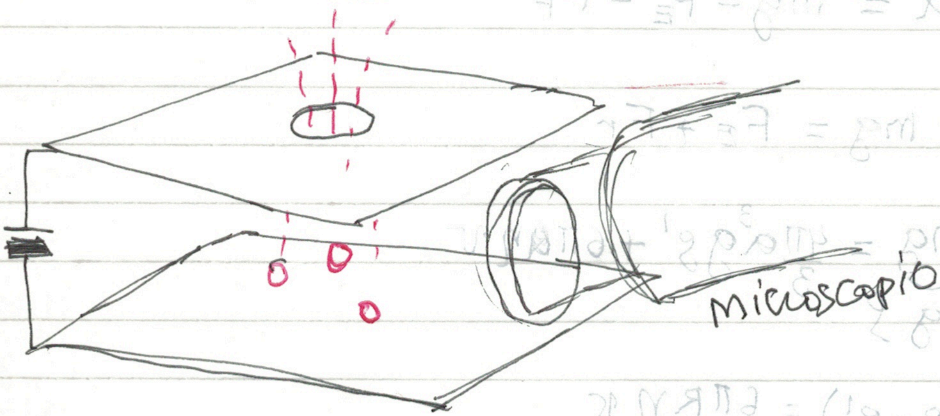
Midiendo la carga del electrón

preliminar: gota de fluido, densidad ρ, radio a, cayendo en un medio densidad ρ', viscosidad η

veloc. terminal: $\boxed{v_g = \dfrac{(2/9)\, g a^2 (\rho-\rho')}{\eta}}$ (1) ley de Stokes

derivación: ejercicio

1906: Robert Millikan: medición directa de e



gotas de aceite cargadas eléctricam. caen entre 2 placas metálicas, sobre las cuales se aplica un voltaje conocido.

$\vec{F} = 0$: F_v medio viscoso F = -(1/k) v masa efectiva gota

μg

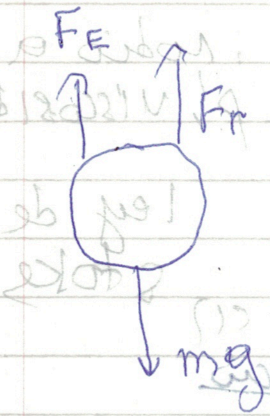
$$V_g = K F_v = K \mu g \qquad (2)$$

aceite aire

$$\mu = \frac{4\pi}{3} a^3 (\rho - \rho') \qquad (3)$$

comparando con (1) $\Rightarrow$ $K = 1/(6\pi a \eta)$ (4)

Midiendo V_g → determinamos a → det. μ y K



$$mg = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho g$$

$$F_E = \rho' \cdot \frac{4\pi}{3} a^3 g$$

$$F_r = 6\pi a \eta v$$

$$ma = mg - F_E - F_r$$

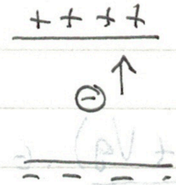
$$\text{si } v = v_g \Rightarrow mg = F_E + F_r$$

$$\underbrace{mg}_{\frac{4\pi}{3} a^3 g \rho} = \frac{4\pi}{3} a^3 g \rho' + 6\pi a \eta v$$

$$\frac{4\pi}{3} a^3 g (\rho - \rho') = 6\pi R \eta v$$

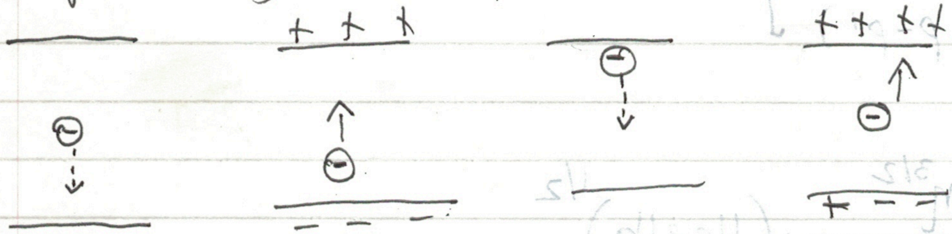
$$v = \frac{4\pi a^3 g (\rho - \rho')}{3 \cdot 6\pi a \eta v} = \left(\frac{2}{9}\right) g \frac{(\rho - \rho') a^2}{\eta} \quad //$$

La carga total en la gota se det. de mediciones de V_g en presencia de E:



$$V_e = K(Eq - mg)$$ ✓

se sigue a una gota individual a través de un ciclo de aplicaciones de voltaje:



$$V_e + V_g = KqE$$

$$\Rightarrow \boxed{q = \frac{V_e + V_g}{KE}}$$

ocasionalmente, la gota cambia su carga total debido a colisiones con las moléculas de aire

$$V_{e1} = K(Eq_1 - mg)$$
$$V_{e2} = K(Eq_2 - mg)$$

$$\Rightarrow V_{e1} - V_{e2} = K(Eq_1 - Eq_2) \Rightarrow \boxed{q_1 - q_2 = \left(\frac{V_{e2} - V_{e1}}{KE}\right)}$$

entero

se encuentra que $q_1 - q_2 \simeq Ne$

También se halló que $q \simeq N'e$.

P. Nobel 1923

$$q = \frac{(V_e + V_g)}{E} \cdot 6\pi a \eta$$

but $$a = \left[\frac{9 V_g \eta}{2g(\rho - \rho')}\right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow q = \frac{18\pi \eta^{3/2}}{\left[2g(\rho-\rho')\right]^{1/2} E} \cdot (V_e + V_g)^{1/2}$$