TOPOLOGÍA II DE POSTGRADO.
PRUEBA 4

Responda cuatro de las siguientes cinco preguntas. Puede asumir que todos los espacios involucrados tienen recubrimiento universal.

(1) Probar que no existen recubrimientos $\phi : K \to T$, donde K es la botella de Klein y T es el toro.

(2) Calcule cuantos recubrimientos regulares 6 a 1 no isomorfos $\phi : Y \to X$ existen Si X es la figura 8, es decir el espacio que se obtiene al pegar dos círculos poe un punto. Recuerde que dos recubrimientos $\phi : Y \to X$ y $\phi' : Y' \to X$ son isomorfos si existe un homeomorfismo entre Y e Y' que hace que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\phi"'] & & Y' \arrow[dl, "\phi'"] \\ & X & \end{tikzcd} .$$

(3) Sea $\phi : Y \to X$ un recubrimiento n a 1 de la figura 8. Probar que existe un recubrimiento regular $\psi : Z \to X$, a lo más $n!$ a 1, y un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "\mu"] \arrow[dr, "\psi"'] & & Y \arrow[dl, "\phi"] \\ & X & \end{tikzcd} ,$$

donde μ es un recubrimiento.

(4) Sea X el espacio de identificación de la figura siguiente:

Determine si existe una función continua $f : X \to T$, donde T es el toro, que no sea homotópica a una función constante.

(5) Sea X un espacio con recubrimiento universal $\widetilde{X}$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

Date: Septiembre 3 de 2019.

- Toda función continua $f : Y \to X$ con Y simplemente conexo es homotópica a una función constante.
- $\widetilde{X}$ es contractible.