TOPOLOGIA Algebraica.
Guía No. 4

Septiembre 20, 2010

Todos los espacios considerados son espacios de Hausdorff.

1. Sea X un espacio con recubrimiento universal $\widetilde{X}$. Sean $\phi_1 : Y_1 \to X$ y $\phi_2 : Y_2 \to X$ dos recubrimientos conexos que satisfacen
$$\phi_{1*}\Big(\pi_1(Y_1; y_1)\Big) = \phi_{2*}\Big(\pi_1(Y_2; y_2)\Big),$$
donde los puntos $y_1 \in Y_1$ e $y_2 \in Y_2$ satisfacen $\phi_1(y_1) = \phi_2(y_2)$. Probar que existe un homeomorfismo $\psi : Y_1 \to Y_2$ tal que $\phi_1 = \phi_2 \circ \psi$.

2. Sea X un espacio topológico con un recubrimiento universal $\widetilde{X}$ y sea $G = \pi_1(X; x)$. Probar que existe una acción propiamente discontinua $G \times \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ tal que para toda curva γ en $\widetilde{X}$ tal que $\gamma(0) = x$ y todo $[\alpha] \in G$ se tiene $[\alpha].\gamma(1) = (\tilde{\alpha} * \gamma_1)(1)$ donde $\tilde{\alpha}$ es un levantamiento de α con $\tilde{\alpha}(0) = x$ y γ_1 es un levantamiento (apropiado) de la imagen de γ en X.

3. En las notaciones del problema precedente, probar que para cada subgrupo H de G existe un recubrimiento $\phi : Y \to X$ tal que $\phi_*\Big(\pi_1(Y; y)\Big) = H$.

4. Sea X un espacio con recubrimiento universal $\widetilde{X}$ y sea $\phi : Y \to X$ un recubrimiento. Sean y e y_1 dos pre-imágenes de un punto $x \in X$. Probar que para una (toda) curva $\alpha = \phi \circ \beta$, donde β une y con y_1, se tiene
$$[\alpha]\phi_*\Big(\pi_1(Y; y_1)\Big)[\alpha]^{-1} = \phi_*\Big(\pi_1(Y; y)\Big).$$

5. En las notaciones del problema precedente, probar que existe un homeomorphismo $\psi : Y \to Y$ que satisface $\phi = \phi \circ \psi$ y $\psi(y) = y_1$ si y sólo

si $\phi_*\Big(\pi_1(Y;y_1)\Big) = \phi_*\Big(\pi_1(Y;y)\Big)$. Concluir que el grupo de automorphismos $\rho : Y \to Y$ que satisfacen $\phi = \phi \circ \rho$ actúan transitivamente en la preimagen $\phi^{-1}(x)$ de un punto $x \in X$ si y sólo si $\phi_*\Big(\pi_1(Y;y)\Big)$ es un subgrupo normal de $\pi_1(X;x)$.

6. Sea $X = X_1 \cup X_2$ donde X_1 es la esfera unitaria y X_2 el segmento que une el polo norte y el polo sur. Describa todos los recubrimientos conexos de X.

7. Sea F el grupo libre con generadores a y b y sea G el subgrupo normal generado por a^2 y b. Encuentre un conjunto de generadores de G (sugerencia: escriba F como el grupo fundamental de un espacio apropiado. Observe que el subgrupo G corresponde a un recubrimiento de dos hojas, y encuentre generadores del espacio recubridor correspondiente).

8. Probar que el grupo libre F_∞ con una cantidad numerable de generadores es isomorfo a un subgrupo del grupo libre F_2 (sugerencia: buscar un recubrimiento de un espacio apropiado).

9. Sea G un grupo finitamente presentado (es decir que G está definido por una cantidad finita de generadores y una cantidad finita de relaciones). Probar que existe un espacio topológico cuyo grupo fundamental es isomorfo a G.

10. Probar que todo espacio que recubre un toro es homeomorfo al plano, un cilindro, u otro toro.

11. Sea X_n el espacio que se obtiene al identificar (en el mismo sentido) todos los lados de un polígono de n lados. Para que valores de n existe un recubrimiento de dos hojas $\phi : Y \to X_n$ con Y conexo?

12. Sea X el espacio que se obtiene al unir todos los círculos en $\mathbb{R}^2$ de radio $1/n$ con n natural, que pasan por el origen y tienen centro en el semieje $\{(x,0)|x > 0\}$ (este espacio se conoce como el Pendiente Hawaiano). Probar que existen espacios topológicos Y, Z y recubrimientos $\phi : Y \to X$, $\psi : Z \to Y$ tales que $\phi \circ \psi$ no es un recubrimiento.