TOPOLOGIA Algebraica.
Guía No. 2

Agosto 17, 2010

Todos los espacios considerados son espacios de Hausdorff.

1. Probar que si X es un espacio topológico contractible e Y es un espacio arco-conexo, entonces $C(X,Y)$ es un espacio arco-conexo.

2. Sea X un espacio topológico. Sea Y un espacio de identificación de X y sea $p : X \to Y$ la proyección canónica.

   (a) Probar que para todo espacio topológico Z podemos identificar $C(Y,Z)$ con un subconjunto de $C(X,Z)$ identificando a cada función continua $f : Y \to Z$ con la función $\tilde{f} : X \to Z$ que induce.

   (b) Si $C(X,Z)$ tiene la topología compacto-abierta, pruebe que la topología compacto-abierta de $C(Y,Z)$ es mas fina que la topología de subespacio.

   (c) probar que las topologías coinciden si p es un recubrimiento.

3. Sea $c : Y \to C(X,Y)$ la función definida por $c(y) = c_y$ donde $c_y(x) = y$ para todo $x \in X$. Probar que c es un homeomorfismo de Y con su imágen.

4. Probar que para todo $x \in X$, la función $E_x : C(X,Y) \to Y$ definida por $E_x(f) = f(x)$ induce un homomorfismo epiyectivo de los correspondientes grupos fundamentales

$$(E_x)_* : \pi_1\Big(C(X,Y); c_y\Big) \to \pi_1(Y; y).$$

5. Sea X un espacio topológico cuyo grupo fundamental es isomorfo a A_5. Encuentre el número de componentes conexas de $C(S^1, X)$.

6. Sea $f_n : S^1 \to S^1$ el recubrimiento dado por $f_n(z) = z^n$. Probar que para una curva cerrada $\alpha : [0,1] \to S^1$ existe una curva cerrada $\beta : [0,1] \to S^1$ tal que $f_n \circ \beta = \alpha$ si y sólo si β es una potencia n-ésima en el grupo fundamental.

7. Un grafo se define como el espacio topológico que se obtiene al identificar algunos puntos extremos (vértices) en un coproducto de intervalos. Probar que todo espacio que recubre un grafo es un grafo.

8. Probar que si X es un espacio conexo y $p : \tilde{X} \to X$ es un recubrimiento, probar que todo par de puntos en X tiene el mismo número de preimágenes en $\tilde{X}$ (si este número es n se dice que el recubrimiento es de n hojas).

9. Sea C el cilindro $C = [0,1] \times [-1,1]/ \equiv$ con la identificación $(0,t) \equiv (1,t)$ y sea M la banda de Moebius definida por $M = [0,1] \times [-1,1]/ \equiv'$ con la identificación $(0,t) \equiv' (1,-t)$. Probar que la función $f : C \to M$ definida por

$$f[s,t] = \left\{ \begin{array}{rcl} [2s,t] & \text{si} & s \leq 1/2 \\ [2s-1,-t] & \text{si} & s \geq 1/2 \end{array} \right\}$$

es un recubrimiento.

10. Probar que existe un recubrimiento del toro en la botella de Klein.

11. Sea $P : \tilde{X} \to X$ un recubrimiento. Probar que P induce un homomorfismo inyectivo
$$P_* : \pi_1(\tilde{X}; y) \to \pi_1(X, x)$$
para cada $y \in P^{-1}(x)$.

12. Probar que toda función continua $f : S^n \to S^1$ con $n > 1$ es homotópica a una función constante.