Ejercicios de Topología.

Abril 5, 2010

1. Probar que en un espacio topológico, dos conjuntos abiertos no vacíos minimales son disjuntos.
2. Probar que la topología cofinita en $\mathbb{R}$ no es primero contable.
3. Calcule cuantas topologías existen en un conjunto con tres elementos.
4. Sea $\mathbb{R}_C$ el conjunto de los números reales provisto de la topología generada por los intervalos de la forma $(-a, a)$. Encuentre la clausura de $\{0\}$ y de $\{7\}$.
5. Probar que en la topología del problema anterior toda red que converge a 3 converge a -4. Pruebe con un ejemplo que el recíproco no se cumple.
6. Probar que en la topología de los dos problemas anteriores una sucesión a_n converge a un punto $x \geq 0$ si y sólo si
$$-x \leq \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \leq x.$$
7. Probar que en la topología cofinita una sucesión converge a cada punto si y sólo si toma cada valor sólo un número finito de veces. Es esto cierto para redes?
8. Sea $\mathbb{R}_L$ el conjunto de los números reales provisto de la topología generada por los intervalos de la forma $(-\infty, a)$. Probar que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_L$ es continua si y sólo si es semicontinua superiormente como función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
9. Sea $\mathbb{R}_L$ como en el problema anterior. Probar que una sucesión a_n converge a un punto x en $\mathbb{R}_L$ si y sólo si
$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq x.$$

10. Sea $\mathbb{R}_l$ el conjunto de los números reales provisto de la topología generada por los intervalos de la forma $(a, b]$. Probar que una función $f : \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}$ es continua si y sólo si es continua por la izquierda en cada punto como función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

11. En las notaciones del problema anterior, probar que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_l$ es continua si y sólo si es constante. (Sugerencia: probar que debe ser continua con la topología usual y que cada punto debe ser un máximo local).

12. Sea $\mathbb{R}_l$ como en el problema anterior. Probar que una sucesión a_n converge a un punto x en $\mathbb{R}_l$ si y sólo si converge a x en el sentido usual y existe un número natural N tal que
$$n \geq N \Rightarrow a_n \leq x.$$

13. Sea $\Lambda = \mathbb{N}$ ordenado por divisibilidad. Sea $a_\lambda = \lambda$. Sea $X = \mathbb{Z}$ con la topología que tiene como base los conjuntos de la forma $a + b\mathbb{Z}$ (esta se conoce como la topología profinita). Probar que $\{a_\lambda\}_{\Lambda \in \Lambda}$ es una subred convergente de la sucesión $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $b_n = n$.

14. Sea $\mathbb{R}^n$ el espacio euclideano con la topología usual y sea H un subgrupo de $\mathbb{R}^n$ como grupo aditivo. Probar que su clausura $\bar{H}$ es un grupo aditivo.

15. Un espacio topológico X se dice irreducible si todo par de subconjuntos abiertos de X tienen intersección no vacía. Probar que un espacio topológico X es irreducible si y sólo si existe una red en X que converge a cada punto de X.

16. Un espacio topológico X se dice homogéneo si para cada par de puntos x e y en X existe un homeomorfismo $f : X \to X$ tal que $f(x) = y$. Probar que:

    (a) Si un espacio homogéneo tiene un punto denso, entonces cada punto es denso.

    (b) Si un espacio homogéneo tiene un punto cerrado, entonces cada punto es cerrado.

    (c) Si un espacio homogéneo tiene un punto abierto, entonces el espacio es discreto.

    (d) En un espacio homogéneo finito, los abiertos no vacíos minimales tienen el mísmo número de elementos.