Teoría de Números Algebraicos

Luis Arenas

September 28, 2021

Contents

Chapter 1

De los enteros y otros dominios

1.1 Anillos, anillos conmutativos y sus ideales

El conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ de los *enteros*, o *números enteros*, positivos y negativos es un anillo con las operaciones usuales de suma y producto. A lo largo de estos apuntes encontraremos numerosas estructuras de este tipo, por lo que repasaremos aquí sus propiedades básicas.

Recordemos que un anillo $(A, +, \cdot)$ es un grupo abeliano $(A, +)$ donde la operación conmutativa $+$ recibe el nombre de suma, junto con una segunda operación, usualmente denotada por "$\cdot$", o simplemente por yuxtaposición, denominada producto, que satisface las propiedades siguientes

1. $a(b + c) = ab + ac$, y $(b + c)a = ba + ca$,
2. $(ab)c = a(bc)$.

Si además se cumple que existe un elemento $1 \in A$ tal que $1a = a1 = a$ para todo $a \in A$ se dice que A es un *anillo unitario*. Si $ab = ba$ para todo par de elementos a y b en A, se dice que el anillo A es conmutativo. El anillo $\mathbb{Z}$ es un anillo conmutativo y unitario. En estas notas, utilizaremos la palabra anillo en el sentido de "anillo unitario", lo que es bastante usual en la literatura. Si necesitamos referirnos a un anillo no unitario, o no necesariamente unitario, lo diremos explícitamente. Nos referiremos a él como un ANNU (las iniciales de "anillo no necesariamente unitario"). Por ejemplo, el conjunto $2\mathbb{Z} = \{2t | t \in \mathbb{Z}\}$ de todos los enteros pares es un ANNU. Un ANNU $I \subseteq A$ es un

ideal si $aI = Ia = I$ para todo elemento $a \in A$. Si A es conmutativo basta comprobar que $aI = I$. La mayoría de los ANNU que aparecen en estas notas son ideales, por lo que nos referimos a ellos por ese nombre, "ideales".

Ejemplo 1.1. El conjunto $2\mathbb{Z}$ de números pares, así como el conjunto $n\mathbb{Z}$ de múltiplos de n para cada n, son ideales de $\mathbb{Z}$. Más generalmente, si el anillo A es conmutativo, entonces $aA = \{ab | b \in A\}$ es un ideal para cada elemento a de A. El ideal aA se llama el ideal principal generado por a y se denota también (a). Estos ideales jugarán un papel crucial en todo lo que sigue.

Dados dos ideales I y J, tamto su intersección $I \cap J$ como su suma $I + J = \{a + b | a \in I, J \in b\}$ son ideales. También es un ideal su producto IJ, definido como sigue:

$$IJ = \left\{ \sum_i a_i b_i \Big| a_i \in I, b_i \in J \right\}.$$

En un anillo arbitrario A, los elementos $a \in A$ que tienen un inverso multiplicativo $b \in A$, es decir $ab = ba = 1$, reciben el nombre de unidades. Las únicas unidades del anillo $\mathbb{Z}$ de números enteros son los elementos 1 y -1. Un elemento u en un anillo conmutativo A es una unidad si y sólo si el ideal Au de múltiplos de u es igual al anillo completo A. Otros ejemplos básicos de unidades son los siguientes:

1. En un cuerpo, todo elemento no nulo es una unidad.

2. En el anillo de polinomios $K[x]$, con coeficientes en un cuerpo K, las unidades son las constantes no nulas.

3. En el anillo de matrices $\mathbb{M}_n(K)$, con coeficientes en un cuerpo K, las unidades son las matrices con determinante no nulo. Más generalmente, si consideramos el anillo de matrices $\mathbb{M}_n(C)$, cuyos coeficientes se encuentran en un anillo conmutativo C, las matrices invertibles son aquellas cuyo determinante es invertible.

4. El anillo $K \times K$, con las operaciones por cordenadas, tiene como unidades precisamente a los elementos con todas sus coordenadas no nulas.

5. En el anillo $\mathbb{Z}[x]$, de polinomios con coeficientes enteros, las unidades son 1 y -1. Más generalmente, para todo "dominio" D, es decir para todo anillo conmutativo sin divisores de cero, las unidades de $D[x]$ son las unidades del anillo D.

6. En el anillo de polinomios $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[x]$, de polinomios con coeficientes en el anillo $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ de enteros módulo 4, el elemento $\bar{1} + \bar{2}x$ es una unidad, ya que se tiene la relación

$$(\bar{1} + \bar{2}x)(1 - \bar{2}x) = \bar{1} - \bar{4}x^2 = \bar{1}.$$

En estas notas trabajaremos intensamente con anillos cocientes, por lo que ejemplos como este último nos resultan particularmente interesantes.

1.2 Dominios Euclideanos

Recordemos que un dominio de integridad D se dice un dominio euclideano (DE) si existe una función $g : (D\backslash\{0\}) \to \mathbb{N}$ que satisface la propiedad siguiente:

> Para todo elemento $m \in D$, y para todo $n \in D\backslash\{0\}$, existen elementos q y r en D, llamados el cociente y el resto, que satisfacen las relaciones siguientes:
>
> $$n = qm + r \quad y \quad \Big(g(r) < g(m) \text{ o } r = 0\Big).$$

En este caso se dice que la función g es un algoritmo de Euclides en D. La existencia de un algoritmo de Euclides en D tiene importantes consecuencias en la estructura de D. En el anillo $\mathbb{Z}$, la función $g(n) = |n|$ es un algoritmo de Euclides, lo que hace del anillo $\mathbb{Z}$ un dominio Euclideano. Mas precisamente, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.2. *Si a y b son enteros con $b \neq 0$, existen enteros q y r únicamente determinados, que satisfagan las propiedades siguientes:*

1. $a = bq + r$,
2. $0 \leq r < |b|$.

Demostración: Sea $b \neq 0$ un entero fijo, pero arbitrario. Probaremos el resultado para $a, b \geq 0$ por inducción completa en a. Suponemos que la conclusión se cumple para todo entero no negativo menor que a. Si $a < b$, basta tomar $q = 0$ y $r = a$. Si a no es menor que b, entonces $a - b \geq 0$ y

podemos utilizar la hipótesis de inducción para escribir $a - b = q'b + r'$ con $0 \leq r' < b$. Ahora definimos $q = q' + 1$ y $r = r'$. Se sigue del siguiente cálculo:

$$qb + r = (q' + 1)b + r' = (q'b + r') + b = (a - b) + b = a,$$

que la conclusión es cierta para a, y por lo tanto para todo entero no negativo por inducción completa. Si a es negativo y b es positivo, escribimos $-a = q'b + r'$ con $0 \leq r' < b$ por lo ya demostrado, y a continuación definimos q y r, en términos de los elementos q' y r', como sigue:

1. Si $r' = 0$, definimos $r = 0$ y $q = -q'$.
2. Si $r' > 0$ definimos $q = -q' + 1$ y $r = b - r'$.

En cada caso se comprueba fácilmente que se cumplen las condiciones $a = bq + r$ y $0 \leq r < b$ (o $r = 0$), de donde se tiene lo pedido. Finalmente, el caso en el que b es negativo se reduce al caso positivo cambiando simplemente el signo del cociente, lo que funciona gracias a la observación siguiente:

$$qb + r = (-q)(-b) + r.$$

□

Nótese que la unicidad en el resultado que precede proviene de la condición de que el resto sea un entero positivo. En la práctica esta condición puede ignorarse, para escribir la división de 312 por 65 como $312 = 65 \times 5 - 8$, en lugar de $312 = 65 \times 4 + 57$ como estamos acostumbrados. Esta observación tiene importantes consecuencias para el algoritmo de Euclides, que estudiaremos en la sección siguiente.

Proposición 1.3. *Si a y b son enteros con $b \neq 0$, existen enteros q y r que satisfacen las propiedades siguientes:*

1. $a = bq + r$,
2. $0 \leq |r| \leq \frac{1}{2}|b|$.

Demostración: Asumamos primero que b e positivo. Escribamos $a = q'b + r'$, donde q' y r' son como en la proposición precedente. En este caso se tiene $q'b \leq a \leq (q' + 1)b$. Sea $r'' = b - r'$. Podemos escribir alternativamente $a = (q' + 1)b + (-r'')$. Afirmamos que, o bien $r' \leq \frac{b}{2}$, o bien $r'' = |-r''| \leq \frac{b}{2}$.

Esto terminará la demostración. Para probar la afirmación, observamos que r' y r'' son ambos positivos y satisfacen $r' + r'' = b$. Si fuesen ambos mayores que $\frac{b}{2}$ su suma debería ser mayor a b, lo que es absurdo. El caso en el que b es negativo se cubre como antes. □

1.3 Máximo común divisor

Un ideal I de un anillo conmutativo A se dice principal si es el ideal principal generado por algún elemento de A, es decir, si existe un elemento $a \in A$ tal que $I = aA = (a)$.

Proposición 1.4. *En un DE todo ideal es principal.*

Demostración Sea I un ideal no nulo en el dominio euclideano D. Sea $m \in I$ un elemento no nulo tal que $g(m)$ es minimal. Sea $n \in I$ un elemento arbitrario. Entonces $n = mq + r$ con $g(r) < g(m)$ o $r = 0$. Nótese que $r \in I$. Por la minimalidad de m, la alternativa $g(r) < g(m)$ es imposible, por lo que solo puede ser $r = 0$, es decir $n = qm$. Como $n \in I$ es arbitrario, $I = (m)$, como se afirmaba. □

Ejemplo 1.5. En el anillo de enteros $\mathbb{Z}$ todo ideal es principal. De hecho, todo ideal de $\mathbb{Z}$ es de la forma $n\mathbb{Z}$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Nótese que esto incluye el caso $n = 0$, lo que nos dá el ideal nulo $(0) = \{0\}$, y el caso $n = \pm 1$, lo que nos dá el ideal completo $(1) = (-1) = \mathbb{Z}$.

definición 1.6. Un dominio de integridad D donde cada ideal es principal recibe el nombre de dominio de ideales principales (DIP). En un DIP, para todo par de elementos n y m el ideal $I = (m) + (n)$ es un ideal principal. Un generador d de I recibe el nombre de máximo común divisor de m y n. Todo DE es un DIP por lo ya demostrado. En particular, $\mathbb{Z}$ es un DIP.

Dados elementos m y n en D, diremos que m divide a n o que m es un divisor de n, en simbolos, $m|n$, si existe $t \in D$ tal que $n = mt$. En particular $m|n$ si y sólo si $(n) \subseteq (m)$. Dado que el máximo común divisor d de m y n satisface $(d) = (n) + (m)$, existen r y s en D tales que $d = rn + ms$. En particular, todo divisor común de n y m debe dividir a d. Por otro lado, como (d) contiene a (m) y (n) se tiene que d es efectivamente un divisor común de m y n. De allí su nombre.

Existe un algoritmo sencillo para encontrar el máximo común divisor de dos elementos n y m en un DE arbitrario D, así como para escribirlo como una combinación del tipo $nu+mv$. Para ello, dividimos n por m obteniendo:

$$n = q_0 m + r_0,$$

con $g(r_0) < g(m)$. A continuación dividimos de nuevo e iteramos

$$m = q_1 r_0 + r_1,\ r_0 = q_2 r_1 + r_2, \ldots, r_i = q_{i+2} r_{i+1} + r_{i+2}, \ldots$$

con $g(r_0) > g(r_1) > g(r_2) > \ldots$.

Proposición 1.7. *En el algorithmo precedente, el último resto distinto de* 0 *que se obtiene es el máximo común divisor.*

Demostración Sea I el ideal $(n)+(m)$. Como $n-q_0 m = r_0$ y $m-q_1 r_0 = r_1$, se tiene que r_0 y r_1 están en I. Dado que $r_{i+2} = r_i - q_{i+2} r_{i+1}$, se prueba por inducción que cada nuevo resto está en el ideal I. Por otro lado si r_t es el último resto no nulo, se tiene que $r_{t-1} = q_{t+1} r_t$, de donde $r_{t-1} \in (r_t)$. Como $r_i = q_{i+2} r_{i+1} + r_{i+2}$ se prueba inductivamente que todos los restos anteriores están en (r_t). Como $m = q_1 r_0 + r_1$, se tiene que m está en (r_t). Finalmente, $n = q_0 m + r_0$ implica $n \in (r_t)$. Se concluye que $(r_t) = I$. □

Si se utiliza la notación $(n, m) = (n) + (m)$, como haremos en todo lo que sigue, lo que se demuestra arriba es la relación $(r_t) = (n, m)$. Es posible profundizar esta observación notando que las ecuaciones $r_{t-1} = q_{t+1} r_t$ y $r_{t-2} = q_t r_{t-1} + r_t$ demuestran que $(r_{t-2}, r_{t-1}) \subseteq (r_t)$, mientras que, al despejar $r_t = -q_t r_{t-1} + r_{t-2}$, se obtiene la contención inversa $(r_t) \subseteq (r_{t-2}, r_{t-1})$. Iterando este argumento, se obtiene la cadena de identidades siguiente:

$$(r_t) = (r_{t-2}, r_{t-1}) = (r_{t-3}, r_{t-2}) = \ldots = (m, r_0) = (n, m).$$

Alternativamente, uno puede interpretar las ecuaciones $r_{t-1} = q_{t+1} r_t$ y $r_{t-2} = q_t r_{t-1} + r_t$ como la siguiente identidad matricial:

$$\begin{pmatrix} r_t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{t+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{t-1} \\ r_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{t+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{t-2} \\ r_{t-1} \end{pmatrix}.$$

Iterando esta interpretación obtenemos la identidad

$$\begin{pmatrix} r_t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{t+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_t \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix},$$

la que puede utilizarse para encontra los elementos r u y v que satisfacen la relación $r_t = un + vm$. De hecho, son los coeficientes superiores del producto de matrices de arriba. En otras palabras, existen elementos $w, z \in D$ que satisfacen la identidad siguiente:

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{t+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_t \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1.8. Calcularemos el maximo común divisor de 148 y 256. Comenzamos dividiendo 256 por 148.

$$256 = 1 \times 148 + 108.$$

A continuacuón dividimos el divisor por el resto, e iteramos:

$$148 = 1 \times 108 + 40,\ 108 = 2 \times 40 + 28,\ 40 = 1 \times 28 + 12,$$

$$28 = 2 \times 12 + 4,\ 12 = 3 \times 4 + 0.$$

El último resto distinto de 0 es el máximo común divisor, es decir 4. Para encontrar u y v se procede multiplicando las matrices correspondientes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -19 \\ -37 & 64 \end{pmatrix}.$$

Esto nos da la expresión $4 = 11 \times 256 - 19 \times 148$.

Ejemplo 1.9. Repetimos ahora el cálculo precedente considerando la posibilidad de que los restos sean negativos. La primera división nos da $256 = 2 \times 148 - 40$. Las subsecuentes nos dan

$$148 = (-4) \times (-40) - 12, \qquad -40 = 3 \times (-12) - 4,$$

y finalmente $-12 = 3 \times (-4)$. El producto de matrices queda como sigue:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 19 \\ 37 & -64 \end{pmatrix}.$$

Esto nos da la expresión $(-4) = (-11) \times 256 + 19 \times 148$. Nótese el cambio de signo en el máximo común divisor.

Es posible ahorrar algo de tiempo utilizando la relación

$$\begin{pmatrix} r_{t-1} \\ r_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_t \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix},$$

en la que no se emplea el último resto, ya que esto permite disminuir en uno el número de matrices a multiplicar. En este caso, los elementos u y v aparecen en la fila inferior de la matriz producto.

1.4 Asociados y factorización única

definición 1.10. Sea D un dominio de integridad. Sean $n, n' \in D$. Diremos que n' es asociado de n, si se tienen simultaneamente $n'|n$ y $n|n'$. Equivalentemente, dos elementos, n y n' son asociados si y sólo si generan el mismo ideal principal, es decir $(n) = (n')$. Observese que si $n = tn'$ y $n' = t'n$ entonces $n(tt' - 1) = 0$. Dado que D es un dominio, se puede concluir que $tt' = 1$, por lo que t y t' son unidades del anillo D. Se concluye que dos elementos, n y n' son asociados si y sólo si existe una unidad $u \in D^*$ tal que $n' = un$. Los asociados de 1 son precisamente las unidades del dominio D.

definición 1.11. Sea D un dominio de integridad. Sea $p \in D - \{0\}$. El elemento p se dice primo, si para todo par de lementos a y b en D, la condición $p|ab$ implica $p|a$ o $p|b$. Equivalentemente, $p \neq 0$ es primo si y sólo si el ideal (p) es primo´, es decir $D/(p)$ es un dominio de integridad. En particular, todo asociado de un primo es un primo.

Proposición 1.12. *Sea D un DIP. Un elemento $p \in D$ es primo si y sólo si el ideal (p) es maximal.*

Demostración. Recordemos que un ideal es maximal si y sólo si el correspondiente cociente es un cuerpo, como se concluye del hecho de que todo elemento no invertible genera un ideal principal propio (ver apuntes de grupos y anillos para más detalles). Por esta razón, si (p) es maximal, en particular es primo, ya que todo cuerpo es un dominio de integridad. Por otro lado, si (p) no es maximal, entonces está propiamente contenido en un ideal maximal (p'). En particular, p' divide a p. Se sigue que $p = tp'$, y como p no divide a p', debe dividir a t. Luego $t = ps$, de donde $p = tp' = psp'$. Se concluye que $sp' = 1$, pero esto es imposible ya que asumimos que (p') era un ideal propio. □

Proposición 1.13. *Todo elemento de un DIP D que no es una unidad es divisible por un elemento primo.*

Demostración. Esto es inmediato, ya que todo ideal está contenido en un ideal maximal, cómo se demuestra mediante un sencillo razonamiento vía lema de Zorn (esto requiere caracterizar los ideales propios como ideales que no contienen al 1, vea los apuntes de grupos y anillos para más detalles). □

Proposición 1.14. *En un DIP D, cada elemento no nulo es producto de primos y unidades.*

Demostración. Por la proposición precedente, en un DIP todo elemento $n \notin D^*$ puede escribirse en la forma $n = p_1 n_1$. Si n_1 no es una unidad podemos repetir el proceso y escribir $n = p_1 p_2 n_2$. Iterando, si el algún momento se llega a algún $n_r \in D^*$, por lo que se habrá escrito n como producto de primos y unidades. En principio, la otra alternativa sería obtener una cadena infinita estrictamente ascendente de ideales

$$(n) \subset (n_1) \subset (n_2) \subset \ldots,$$

donde cada nuevo elemento n_i divide al anterior n_{i-1} pero no a la inversa. Afirmamos que esto no puede ocurrir. Para ello definimos el conjunto

$$I = \{a \in D | n_t \text{ divide a } a \text{ para algún } t \in \mathbb{N}\}.$$

Afirmamos que I es un ideal. De hecho, si n_t divide a a, entonces divide a ab para todo $b \in D$. Por otro lado, si n_t divide a a, y si n_s divide a b, entonces $n_{\max\{t,s\}}$ divide a ambos a y b, por lo que divide también a $a+b$. Como D es un DIP, debe tenerse $I = (d)$ para algún $d \in D$. En particular, el generador d pertenece a I. Por definición de I, el elemento d debe ser divisible por algún n_t, de donde $n_{t+1} \in I = (d) \subseteq (n_t)$, lo que contradice la construcción de los n_t's. □

La descomposición de un elemento n no es única, dado que siempre es posible remplazar un primo por uno de sus asociados y cambiar las unidades. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}$ se tiene

$$4 = 2 \times 2 = (-2) \times (-2) = (-1) \times 2 \times (-2).$$

Sin embargo, esta es la única excepción. Antes de demostrarlo necesitamos un lema.

Lema 1.15. *Si p y q son primos del DIP D, y si p divide a q, entonces p y q son asociados.*

Demostración. Si p divide a q entonces $(q) \subseteq (p)$. Como el ideal (q) es maximal, see concluye la igualdad $(q) = (p)$. □

Proposición 1.16. *Sea D un DIP. Sea*

$$n = up_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} = vq_1^{\beta_1} \dots q_s^{\beta_s}, \tag{1.1}$$

donde $p_1, \dots, p_r$ son primos no asociados por pares, y lo mismo ocurre con $q_1, \dots, q_s$. Entonces $s = r$, y existe una permutación σ de $\mathbf{r} = \{1, \dots, r\}$ tal que p_i es asociado a $q_{\sigma(i)}$ y $\alpha_i = \beta_{\sigma(i)}$.

Demostración. Por inducción en t. Si $t = 0$, entonces n es una unidad y no hay nada que probar. Supongamoslo cierto para $t - 1$. Como p_t es primo, éste debe dividir a algún q_j, y por lo tanto debe ser asociado a él. re-enumerando los elementos $q_1, \dots, q_s$ si es necesario, podemos suponer que $j = s$. Digamos $q_s = wp_r$ con $w \in D^*$. Entonces simplificando en (1.1) se tiene

$$up_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r - 1} = (vw^{-1})q_1^{\beta_1} \dots q_s^{\beta_s - 1}.$$

Si $\alpha_r > 1$, el lado izquierdo es aún divisible por p_1 por lo que tambien lo es el derecho. Se concluye que $\beta_s > 1$. Iterando este procedimiento se tiene $\alpha_r \leq \beta_s$, y por simetría $\alpha_r = \beta_s$. simplificando $p_r^{\alpha_r}$ a ambos lados se tiene:

$$up_1^{\alpha_1} \dots p_{r-1}^{\alpha_{r-1}} = (vw^{-r})q_1^{\beta_1} \dots q_{s-1}^{\beta_{s-1}},$$

por lo que se puede aplicar la hipótesis de inducción. □

1.5 Ejercicios

1. Sean m y n dos enteros positivos y d su máximo común divisor. El mínimo común múltiplo de m y n se define como el generador positivo r del ideal $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$. Probar que $rd = mn$.

2. Encuentre el máximo común divisor de 6.528 y 3.791.

3. Encuentre enteros positivos t y s tales que $190t + 455s = 5$.

4. Encuentre enteros a y b tales que

$$\frac{a}{155} + \frac{b}{341} = \frac{2}{1705}.$$

5. Probar que si m, n, y t son tres enteros positivos, tales que ningún primo divide simultaneamente a los tres, entonces existen enteros a, b, y c tales que $am + bn + ct = 1$.

6. Una ranita está parada sobre una cinta infinita dividida en casillas, cómo en la Figura 1.1. Asumiendo que la ranita sólo puede dar saltos de largo 5 y 8 (tanto adelante como hacia atrás), demuestre que la ranita es capaz de visitar cualquier casilla del tablero. Si la ranita

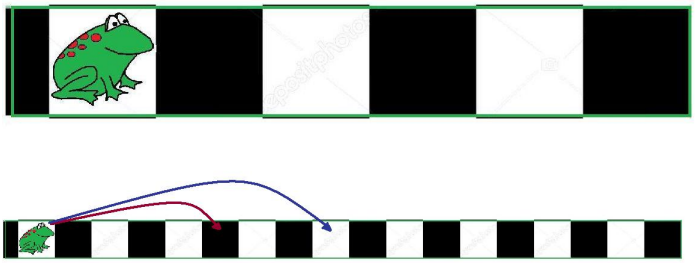


Figure 1.1: Una ranita en una cinta infinita.

puede dar saltos de tamaño n y m, que condición en estos números asegura que la ranita puede visitar cualquier casilla de la cinta?

Chapter 2

Congruencias

Si J un ideal de un anillo conmutativo A, el cociente A/J es un anillo con operaciones derivadas de las operaciones correspondientes de A, por ejemplo

$$(a+J)(b+J) \subseteq ab + aJ + Jb + JJ \subseteq ab + J + J + J = ab + J.$$

lo que muestra que el producto es una operación bien definida en el cociente A/J. Para todo anillo A, el anillo cociente $A/(0)$ es isomorfo al anillo A, mientras que A/A es el anillo trivial con un elemento. Estos son los cocientes triviales del anillo A. Cualquier otro cociente se dice no trivial. Cuando $A = D$ es un DIP, los ideales de D son los ideales principales de la forma nD para algún elemento $n \in D$. En este caso el anillo cociente D/nD recibe el nombre de anillo módulo D. Este uso está particularmente extendido en el caso $D = \mathbb{Z}$, donde el anillo cociente $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ recibe el nómbre de anillo de enteros módulo n. Tendremos bastante que decir sobre este tipo de anillo cociente en estas notas. Los elementos de un cociente A/J se denotan a menudo por $\bar{a} = a + J$, En estas notas, emplearemos a menudo la notación alternativa en la que elementos del cociente son considerados elementos del anillo original con una "igualdad modificada", con la que una identidad del tipo $a + J = b + J$ se denota más bien $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, J)$. En el caso de un ideal principal de la forma $J = nA$, se usa a menudo la forma $a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, n)$. Estas notaciones están tan extendidas en álgebra y teoría de números, que no serán explicadas mayormente aquí.

A menudo, al escribir un cociente del tipo A/J, se asume tácitamente que se trata de un cociente no trivial. Por ejemplo, si $A = \mathbb{Z}$, al hablar del anillo de enteros módulo n $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, se asume que n no es 0 ni ± 1.

2.1 Inversos módulo n

Podemos caracterizar fácilmente los elementos invertibles, o unidades, en el anillo D/nD utilizando los resultados del capítulo precedente. De hecho, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.1. *Una clase residual $a+nD$ es invertible en el anillo D/nD si y sólo si a es relativamente primo con n.*

Demostración. Si a y n son relativamente primos, entonces existen enteros t y s tales que $at + ns = 1$. Se concluye que

$$(a + nD)(t + nD) = (at + nD) = (at + ns + nD) = (1 + nD).$$

Por otro lado, si se tiene que

$$(a + nD)(t + nD) = (1 + nD)$$

para algún elemento $t \in D$ entonces $at - 1 \in nD$, o en otras palabras $at - 1 = ns$ para algún elemento $s \in D$, de donde se sigue que $at + ns = 1$, y por lo tanto a es relativamente primo con n. □

Podemos utilizar la relación entre el inverso de a módulo n con las soluciones de $at+ns = 1$ para dar un procedimiento alternativo que nos permita escribir 1 como combinación lineal de dos elementos relativamente primos. Este se describe en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2. Queremos encontrar enteros s y t tales que $143s + 225t = 1$. Para ello re-escribimos el problema como la congruencia $225t \equiv 1 \pmod{143}$, lo que es equivalente a $82t \equiv 1 \pmod{143}$, puesto que 225 es congruente a 82 módulo 143. Volvemos a re-escribir la ecuación como $82t + 143p = 1$, la cual puede escribirse nuevamente como la congruencia $143p \equiv 1 \pmod{82}$, o, simplificando, como $61p \equiv 1 \pmod{82}$. Iteramos el procedimiento algunas veces más, obteniendo las relaciones siguientes:

$$61p + 82k = 1, \qquad 82k \equiv 1 \pmod{61}, \qquad 21k \equiv 1 \pmod{61},$$

$$61q + 21k = 1, \qquad 61q \equiv 1 \pmod{21}, \qquad -2q \equiv 1 \pmod{21}.$$

De esta última relación se obtiene $q \equiv -11 \equiv 10 \pmod{21}$, y, de la solución $q = 10$, se concluyen fácilmente las soluciones $k = -29$, $p = 39$, y finalmente $t = -68$ y $s = 107$.

Dejamos al lector la terea de entender por qué este procedimiento es equivalente al algoritmo de Euclides.

En álgebra, hay un segundo ejemplo de dominio euclideano tan utilizado como el anillo $\mathbb{Z}$. Es el anillo de polinomios $K[x]$, de polinomios en una indeterminada x y con coeficientes en un cuerpo K. Si A es un álgebra (con 1) sobre K y $a \in A$ es cualquier elemento, el ideal I_a formado por los polinomios que se anulan al evaluarlos en a es un ideal principal generado por el polinomio minimal $m_a(x)$. La función evaluación $\phi_a : K[x] \to A$ es un homomorfismo de anillos, es decir una función que preserva sumas, productos y lleva el 1 de K en el 1 de A. Su imagen es el sub-anillo $K[a] \subseteq A$, mientras que su núcleo es el ideal I_a. El primer teorema de isomorfía de la teoría de anillos establece la existencia de un isomorfismo entre el anillo cociente $K[x]/(m_a)$ y el anillo $K[a]$, el que comunmente recibe el nombre de anillo generado por a. El anillo $K[a]$ es un cuerpo, por lo tanto, precisamente cuando el polinomio minimal $m_a \in K[x]$ es primo (en el caso de polinomios se usa a menudo la palabra irreductible).

Ejemplo 2.3. Queremos encontrar el inverso del complejo $1+i$. Esto puede hacerse de dos maneras. La tradicional es racionalizar, como sigue:

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2}.$$

Una alternativa es resolver la ecuación $s(x)(1+x) + t(x)(x^2+1) = 1$, para luego evaluar en i. Este segundo procedimiento es enteramente análogo a lo hecho más arriba con enteros. Las división $x^2 + 1 = (x+1)(x-1) + 2$ nos dá la solución $2 = (x^2+1) - (x+1)(x-1)$, de donde se obtiene el resultado precedente.

Ejemplo 2.4. En un ejemplo algo más elaborado, se quiere calcular el inverso de $\eta^3 - 2 \in \mathbb{Q}[\eta]$, donde η es una raiz quinta primitiva de la unidad, cuyo polinomio irreducible es $1+x+x^2+x^3+x^4$. Para esto, buscamos una solución de la ecuación

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)t(x) + (x^3 - 2)s(x) = 1.$$

Reduciendo módulo $x^3 - 2$, o, lo que viene a ser lo mismo, evaluando en la raiz $\sqrt[3]{2}$, se obtiene la identidad

$$\left(1 + \sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2 + (\sqrt[3]{2})^3 + (\sqrt[3]{2})^4\right) t\left(\sqrt[3]{2}\right) = 1.$$

Simplificando esta última expresión nos dá

$$\left(3 + 3\sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2\right) t\left(\sqrt[3]{2}\right) = 1,$$

lo que es equivalente a la ecuación

$$(3 + 3x + x^2)t(x) + (x^3 - 2)u(x) = 1.$$

Para resolver esta última evaluamos en $\alpha = \frac{-3+\sqrt{-3}}{2}$, una raiz del primer polinomio. Dado que $\alpha^2 = -3(\alpha + 1)$, obtenemos lo siguiente:

$$1 = (\alpha^3 - 2)(\alpha) = \Big(- 3(\alpha + 1)\alpha - 2\Big)u(\alpha) = (-3\alpha^2 - 3\alpha - 2)u(\alpha)$$

$$= (6\alpha - 7)u(\alpha).$$

Una vez más, esta ecuación equivale a

$$(3 + 3x + x^2)w(x) + (6x + 7)u(x) = 1,$$

la que se resuelve evaluando en $-\frac{7}{6}$. Esto dá la condición

$$w\left(-\frac{7}{6}\right) = \left(3 + 3\left(-\frac{7}{6}\right) + \left(-\frac{7}{6}\right)^2\right)^{-1} = \frac{36}{31}.$$

Escogiendo el valor constante para w se tienen las soluciones sucesivas $w(x) = \frac{36}{31}$, $u(x) = \frac{-6x-11}{31}$, $t(x) = \frac{6x^2-7x+3}{31}$ y, finalmente, $s(x) = \frac{-6x^3+x^2-2x-14}{31}$. Esto nos dice que el valor del inverso es $(\eta^3 - 2)^{-1} = s(\eta) = \frac{-6\eta^3+\eta^2-2\eta-14}{31}$.

Dejamos al lector el desafío de repetir el cálculo precedente utilizando el método matricial descrito en el Capítulo 1, para hacerse una idea de qué método es mejor. Lo mismo vale para el cálculo de inversos resolviendo un sistema ecuaciones lineales para los coeficientes de s.

Otra propiedad de los inversos que ocuparemos a menudo es la siguiente:

Proposición 2.5. *Sea K el cuerpo de cocientes del anillo D y sea $B \subseteq K$ el anillo formado por todas aquellas fracciones de la forma $\frac{r}{s}$ con n y s relativamente primos. Entonces existe un homomorfismo de B a D/nD que lleva cada elemento de D a su clase lateral correspondiente.*

Demostración. Esto no es otra cosa que un ejemplo de la propiedad universal de la localización (ver apuntes de grupos y anillos), pero damos aquí una demostración independiente. El homomorfismo se define por $\phi\left(\frac{r}{s}\right) = \bar{r}\bar{s}^{-1}$. Demostrar que es un homomorfismo de anillos se reduce a las comprobaciones siguientes:

$$\phi\left(\frac{rr'}{ss'}\right) = \left(\overline{rr'}\right)\left(\overline{ss'}^{-1}\right) = \left(\bar{r}\bar{s}^{-1}\right)\left(\bar{r}'\bar{s}'^{-1}\right) = \phi\left(\frac{r}{s}\right)\phi\left(\frac{r'}{s'}\right),$$

$$\phi\left(\frac{rs'+sr'}{ss'}\right) = \left(\overline{rs'+sr'}\right)\left(\overline{ss'}^{-1}\right) = \left(\bar{r}\bar{s}^{-1}\right) + \left(\bar{r}'\bar{s}'^{-1}\right) = \phi\left(\frac{r}{s}\right) + \phi\left(\frac{r'}{s'}\right).$$

□

Cuando $n = p$ es un primo, el anillo B se denota $D_{(p)}$. Estos anillos, llamados anillos locales racionales (como opuesto a los anillos locales completos que aparecen en un capítulo posterior), jugarán un papel importante en todo lo que sigue.

2.2 Elementos idempotentes y productos de anillos

Si A y A' son anillos conmutativos, su producto cartesiano $A \times A'$ es un anillo conmutativo con las operaciones por coordenadas, es decir las siguientes:

$$(a, a') + (b, b') = (a + b, a' + b'), \qquad (a, a')(b, b') = (ab, a'b').$$

Esta definición puede generalizarse a productos arbitrarios y a anillos no conmutativos, pero no la necesitamos aquí. Dado un anillo A, nos gustaría saber si existen anillos A_1 y A_2 tales que $A \cong A_1 \times A_2$ y de cuantas maneras puede, un anillo dado, escribirse como producto. A diferencia de lo que ocurre en las categorías de grupos y grupos abelianos, el número de maneras en que un anillo puede escribirse como un producto está fuertemente restringido por la existencia de un tipo particular de elementos denominados idempotentes.

definición 2.6. Un elemento $P \in A$ se dice idempotente si $P^2 = P$.

Si $A \cong A_1 \times A_2$, los elementos $(0, 1)$ y $(1, 0)$ son idempotentes de A. Inversamente, probaremos en esta sección que si A tiene idempotentes no triviales, entonces A es un producto.

Lema 2.7. *Si P es un idempotente, entonces $P^c := (1 - P)$ es un idempotente.*

Demostración. $(1-P)^2 = 1-P-P+P^2 = 1-P-P+P = 1-P$. □

A P^c se le llama el complemento de P. Tambien se dice que P y P^c son complementarios. Nótese que se satisfacen las relaciones $P + P^c = 1$ y $PP^c = 0$.

Lema 2.8. *Si P es un idempotente de A, entonces PA es un anillo con unidad $1_{PA} = P$.*

Nótese, sin embargo, que PA no se considera un subanillo de A con la convención de que anillo significa anillo unitario, ya que las unidades 1_A y 1_{PA} de ambos anillos son diferentes.

Demostración. Nótese que PA es un subgrupo, dado que $a \mapsto Pa$ es homomorfismo de grupos. Además, la multiplicación es una operación cerrada, como lo muestra el siguiente cálculo:

$$PAPA = P^2AA = PAA \subseteq PA.$$

Finalmente, todo elemento $x \in PA$ puede escribirse en la forma $x = Py$, de donde se concluye lo siguiente: $Px = PPy = Py = x$. □

Lema 2.9. *Si P es un idempotente central, entonces $A \cong PA \times P^cA$.*

Demostración. La cadena de contenciones

$$A \supseteq PA + P^cA \supseteq (P + P^c)A = A$$

nos demuestra que la suma $PA+P^cA$ es igual a A. Si se tiene $x \in PA \cap P^cA$, entonces $x = Px = PP^cx = 0$. Esto prueba que A es la suma directa $PA \oplus P^cA$ como grupos abelianos. Si $a \in PA$ y $b \in P^cA$, entonces $ab = PaP^cb = PP^cab = 0$. De aqui sigue que si $a \in A$ se escribe como $a = a_1 + a_2$ con $a_1 \in PA$ y $a_2 \in P^cA$, y si $b \in A$ se escribe como $b = b_1 + b_2$ con $b_1 \in PA$ y $b_2 \in P^cA$, se tiene lo siguiente:

$$ab = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 = a_1b_1 + a_2b_2.$$

De donde se concluye el isomorfismo de anillos $A \cong PA \times P^cA$. □

Nótese que para cada par de elementos a y b de A se tiene $(Pa)(Pb) = Pab$. En párticular, la función $x \mapsto Px$ es un homomorfismo de anillos cuyo núcleo es P^cA. Se concluye del primer teorema de isomorfía para anillos que $PA \cong A/P^cA$. Se sigue que el resultado precedente puede re-escribirse como

$$A \cong \frac{A}{P^cA} \times \frac{A}{PA}.$$

Esta última forma es más útil para calcular.

Ejemplo 2.10. En $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ el elemento $3 + 6\mathbb{Z}$ es idempotente. Tambien lo es su complemento $(1 + 6\mathbb{Z}) - (3 + 6\mathbb{Z}) = 4 + 6\mathbb{Z}$. Se concluye que:

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong (3 + 6\mathbb{Z})\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (4 + 6\mathbb{Z})\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.$$

Por otro lado, se tiene el isomorfismo

$$(4 + 6\mathbb{Z})\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \frac{\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Del mismo modo, si recordamos que la imagen de un subgrupo H en el cociente G/K es $(H + K)/K$, tenemos la siguiente cadena de isomorfismos:

$$(3 + 6\mathbb{Z})\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \frac{\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}{4(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})} = \frac{\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}}{(4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z})/6\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/(4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

ya que $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$, por ser 2 el máximo común divisor de 4 y 6. La conclusión final es la siguiente:

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Esta es una primera instancia del teorema chino de los restos, que se estudiará con más detalle en la sección siguiente.

La principal filosofía en lo que respecta a los idempotentes de un anillo conmutativo, es que estos se comportan como los subconjuntos de un espacio. Más precisamente, el conjunto de idempotentes de un anillo es un álgebra booleana. No entraremos en los detalles de esta teoría en estas notas, pero recordar las propiedades de las operaciones de unión, intersección y complemento es a menudo útil en este estudio.

definición 2.11. Sean P_1 y P_2 idempotentes de A. Diremos que $P_1 < P_2$ si $P_1P_2 = P_1$.

Proposición 2.12. *$P_1 < P_2$ si y sólo si $P_1A \subseteq P_2A$.*

Demostración. Si $P_1 < P_2$, entonces $P_1P_2 = P_1$. Luego $P_1A = (P_1P_2)A = P_2(P_1A) \subseteq P_2A$. Por otro lado, si $P_1A \subseteq P_2A$, entonces $P_1 \in P_2A$, luego $P_1P_2 = P_1$. □

Proposición 2.13. *Sean P_1 y P_2 idempotentes que satisfacen $P_1P_2 = 0$. Si $P = P_1 + P_2$, entonces P es un idempotente, y se tiene la identidad $PA = P_1A \oplus P_2A$ y el isomorfismo $PA \cong P_1A \times P_2A$.*

Demostración. $(P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_1P_2 + P_2P_1 + P_2^2 = P_1 + P_2$. Las restantes afirmaciones son un caso particular de $A \cong PA \times P^cA$, aplicado al anillo PA, dado que P es la unidad de PA, mientras que $P - P_1 = P_2$, por lo que P_2 y P_1 son complementarios en ese anillo. □

Dos idempotentes que satisfacen $P_1P_2 = 0$ suelen denominarse disjuntos. Si se tiene una familia $\{P_1, \ldots, P_n\}$ en la que cada par de elementos distintos son disjuntos, diremos que $P_1, \ldots, P_n$ son disjuntos a pares.

Proposición 2.14. *Si $P_1, \ldots, P_n$ son idempotentes centrales disjuntos a pares que satisfacen $P_1 + \ldots + P_n = 1$, entonces $A \cong P_1A \times \ldots \times P_nA$.*

Demostración. Inducción en la proposición anterior. □

Nótese que el isomorfismo de la proposición precedente puede escribirse también como sigue:

$$A \cong \frac{A}{P_1^cA} \times \ldots \times \frac{A}{P_n^cA}.$$

Si P_1 y P_2 son dos idempotentes en un mismo anillo, podemos ecribir

$$1 = (P_1 + P_1^c)(P_2 + P_2^c) = P_1P_2 + P_1P_2^c + P_1^cP_2 + P_1^cP_2^c,$$

donde los idempotentes de la derecha son disjuntos a pares. Además cada uno de los idempotentes originales es suma de algunos de los idempotentes de la derecha. Esto nos permite, por iteración, encontrar una descomposición de la unidad como suma de idempotentes que incluya como subsumas a los elementos de cualquier familia finita pre-existente de idempotentes. Si el anillo tiene una cantidad finita de idempotentes, por ejemplo si es finito, es posible encontrar una descomposición en idempotentes que son minimales respecto de la relación "<". En este caso diremos que se tiene un conjunto completo de idempotentes.

Ejemplo 2.15. Consideremos el anillo $A = \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$. Para descomponer este anillo como un producto, debemos encontrar un conjunto completo de idempotentes de A. Como $6^2 = 36 \equiv 6$ es idempotente, también lo es su complemento $1-6 \equiv 25$. Esto nos dá una descomposición de A como producto. De hecho $A = 6A \times 25A$. Por otro lado $25A = A/6A \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Como ya sabemos que este anillo todavía puede descomponerse como un producto deben existir idempotentes adicionales. De hecho vimos anteriormente que $3+6\mathbb{Z}$ y $4+6\mathbb{Z}$ son idempotentes de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Como la imagen de a en PA es Pa, el idempotente correspondiente a 3 es $3 \times 25 \equiv 15$ y el idempotente correspondiente a 4 es $4 \times 25 \equiv 10$. Se sigue que $6 + 30\mathbb{Z}$, $15 + 30\mathbb{Z}$, y $10 + 30\mathbb{Z}$, son los idempotentes minimales de A. Concluimos que $A \cong 6A \times 15A \times 10A$, o en la forma más cómoda para calcular $A \cong A/25A \times A/16A \times A/21A$, dado que $25 + 30\mathbb{Z}$, $16 + 30\mathbb{Z}$ y $21 + 30\mathbb{Z}$ son los complementos de $6 + 30\mathbb{Z}$, $15 + 30\mathbb{Z}$ y $10 + 30\mathbb{Z}$, respectivamente. Cómo se tienen las identidades $25\mathbb{Z} + 30\mathbb{Z} = 5\mathbb{Z}$, $16\mathbb{Z} + 30\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$ y $21\mathbb{Z} + 30\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}$, el isomorfismo anterior se reduce a

$$A \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Los ejemplos precedentes sugieren que la razón por la que un anillo de la forma $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ puede escribirse como un producto es que n se factoriza como producto de dos números relativamente primos. Veremos en la siguiente sección que este es de hecho el caso.

El lector ya estará convencido en este punto de que, en el álgebra booleana de idempotentes, el producto juega el papel de intersección, mientras que el complemento que definimos aquí juega el mismo papel que el complemento de conjuntos. La suma de idempotentes disjuntos vendría a ser la unión disjunta, por lo que faltaría definir la unión en general. Esto puede hacerse mediante las Leyes de De'Morgan del álgebra booleana. Para conjuntos, esta ley se escribe

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c,$$

por lo que resulta natural definir la unión de idempotentes mediante la fórmula siguiente

$$P_1 \cup P_2 = (P_1^c P_2^c)^c = 1 - (1 - P_1)(1 - P_2) = P_1 + P_2 - P_1 P_2.$$

Dejamos al lector la tarea de probar que esta última expresión define un idempotente, así como probar otros resultados conocidos del álgebra booleana.

Todo lo dicho sobre idempotentes en esta sección se extiende a anillos no conmutativos si se agrega la condición de que sean idempotentes centrales,

es decir que conmuten con cualquier elemento del anillo, como ciertamente lo hacen los elementos $(1_A, 0_B)$ y $(0_A, 1_B)$ en un producto $A \times B$.

2.3 El Teorema Chino de los Restos

Recordemos que en un dominio de ideates principales D, para todo par de elementos relativamente primos a y b, existen elementos t y s tales que $at + bs = 1$. Utilizando este resultado puede probarse que todo anillo de la forma D/nmD con n y m relativamente primos se descompone como un producto.

Proposición 2.16. *Sea D un DIP y sean n y m elementos de D relativamente primos. Entonces el anillo $A = D/nmD$ se descompone como un producto, de hecho*

$$D/nmD \cong D/nD \times D/mD.$$

Demostración. Por los resultados de la sección precedente basta ver que existen elementos idempotentes apropiados. Sean t y s elementos de D que satisfacen $tm + sn = 1$. Sean $P_1 = tm + nmD$ y $P_2 = ns + nmD$. Observese que $P_1 + P_2 = 1 + nmD = 1_A$, mientras que, por otro lado, se tiene la congruencia $tm = tm(tm + ns) \equiv (tm)^2 \pmod{mn}$, la que pruena que el elemento P_1 es un idempotente. Se sigue que P_2 es su idempotente complementario. El resultado se concluye si probamos que P_1A y P_2A son isomorfos a los dos factores del lado derecho. Por un lado

$$P_1A \cong A/P_2A \cong D/(nsD + nmD) = D/nD,$$

donde hemos usado que la relación $tm + sn = 1$ implica que m y s son relativamnete primos, de donde $sD + mD = D$ y por lo tanto $nsD + nmD = nD$. La demostración de la relación $P_1A \cong D/mD$ es similar. □

Nótese que, en la demostración anterior, la imagen de una clase $a + nmD$ en $D/nD \times D/mD$ es el par $(a + nD, a + mD)$. En particular, para cada par de enteros b y c existe una única clase $a + nmD$ tal que $(a + nD, a + mD) = (b + nD, c + mD)$. Se concluye el siguiente resultado:

Proposición 2.17. *Sea D un DIP y sean n y m elementos de D relativamente primos. Entonces para cada par de enteros b y c existe un entero a que satisface las ecuaciones*

$$x \equiv b \pmod{n}, \qquad x \equiv c \pmod{m}.$$

Dos soluciones de dicho sistema son congruentes módulo mn. □

Este último resultado es el que se conoce usualmente como Teorema Chino de los Restos. Los resultados anteriores se generalizan fácilmente a un número mayor de factores. De hecho, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.18. *Sea D un DIP y sean $n_1, \ldots, n_k$ elementos de D relativamente primos a pares. Entonces el anillo $A = Di/nmD$ se descompone como un producto, de hecho*

$$D/(n_1 \cdots n_k)D \cong D/n_1D \times \cdots \times D/n_kD.$$

Demostración. Basta observar que, si $n_1, \ldots, n_k$ son relativamente primos a pares, entonces el producto $n_1 \cdots n_{k-1}$ es relativamente primo con n_k, de donde se concluye lo siguiente

$$D/(n_1 \cdots n_k)D \cong D/(n_1 \cdots n_{k-1})D \times D/n_kD,$$

y el resultado sigue por inducción. □

Del mismo modo que antes, se tiene la consecuencia siguiente:

Proposición 2.19. *Sea D un DIP, y sean $n_1, \ldots, n_k$ elementos de D relativamente primos. Entonces, dados elementos $a_1, \ldots, a_k$, existe un entero a que satisface las ecuaciones*

$$a \equiv a_i \pmod{n_i},$$

para cada $i = 1, \ldots, k$. Dos soluciones de dicho sistema son congruentes módulo $n_1 \cdots n_k$. □

Sea $n = up_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ un elemento de D con sus descomposición en factores primos. Entonces tenemos la descomposición

$$D/nD \cong D/p_1^{r_1}D \times D/p_k^{r_k}D.$$

Se sigue de lo anterior que para entender la estructura del anillo D/nD es suficiente con entender la estructura de D/p^rD para cada primo p y cada exponente r. Este estudio se realiza en las secciones siguientes.

2.4 Elementos nilpotentes y series de potencias

Los anillos de la forma $A = D/p^rD$ se caracterizan por la existencia de elementos de la forma $\pi = p + p^rD$ que satisfacen $\pi^r = 0$. un elemento con una potencia nula se denomina nilpotente. No es difícil comprobar que los elementos nilpotentes del anillo A son precisamente los múltiplos de π. De hecho, $(m\pi)^r = m^r\pi^r = m^r \cdot 0 = 0$, mientras que lo elementos que no son múltiplos de π son de la forma $m + p^rD$ con m relativamente primo a p^r, y por lo tanto invertibles. Se concluye que el conjunto de elementos nilpotentes es el ideal principal $A\pi$, y todo elemento fuera de $A\pi$ es una unidad. En particular $A\pi$ es el único ideal maximal de A. un anillo con un único ideal maximal se denomina local. Los anillos locales racionales son también anillos locales. El Teorema Chino de los Restos nos permite escribir D/nD como un producto de anillos locales. Esta conclusión es útil para lo que viene en capítulos posteriores.

Los elementos nilpotentes de un anillo conmutativo se comportan en muchos aspectos como los elementos infinitesimales del cálculo no-estándar. Por ejemplo, si u es nilpotente, entonces $1 - u$ tiene inverso multiplicativo. De hecho, el inverso de $1 - u$ puede calcularse mediante una serie de potencias

$$(1 - u)^{-1} = 1 + u + u^2 + \cdots$$

donde la suma tiene sentido ya que, despues de un número finito de sumandos, todos los subsecuentes se anulan. De hecho, si $u^n = 0$ entonces se tiene la relación

$$(1 - u)(1 + u + u^2 + \ldots + u^{n-1}) = 1 - u^n = 1,$$

dedonde se deduce la afirmación anterior.

Ejemplo 2.20. En el anillo $\mathbb{Z}/243\mathbb{Z}$, el elemento $4 + 243\mathbb{Z}$ es invertible, ya que $4 = 1 - (-3)$, y su inverso es

$$1 + (-3) + (-3)^2 + (-3)^3 + (-3)^4 + 243\mathbb{Z} = 61 + 243\mathbb{Z}.$$

De hecho tenemos un resultado más general en este sentido.

Proposición 2.21. *Sea A un anillo conmutativo. Sea u una unidad de a, y sea n un elemento nilpotente en A. Entonces el elemento $u + n$ es invertible y su inverso está dado por*

$$(u - n)^{-1} = u^{-1}(1 + nu^{-1} + n^2u^{-2} + \ldots).$$

Demostración. Basta observar que $1 - nu^{-1}$ es nilpotente y por lo tanto invertible, y que $u^{-1}(1 - nu^{-1})^{-1}$ es un inverso de $u - n$. □

Más generalmente, toda serie de potencias con coeficientes en un anillo puede ser evaluada en un elemeneto nilpotente. Esta función evaluación, al igual que la evaluación de polinomios, es un homomorfismo de anillos. Esto implica que identidades que involucran sumas y productos entre series de potencias pueden trasladarse a identidades entre los elementos que se obtienen al evaluar dichas series en un elemento nilpotente dado. Lo mismo ocurre para la composición, con una salvedad. La composión de series de potencias sólo está bien definida, en el contexto algebraico, cuando se evalua una serie de potencias en una serie con término constante nulo. Bajo tales circunstancias, las identidades que involucran composición de series de potencias se preservan bajo la evaluación sin mayor problema.

Como un ejemplo de aplicación de la técnica ya mencionada, probaremos el siguiente resultado:

Proposición 2.22. *Sea $r < p$ un entero positivo. Entonces el conjunto $U_{p,1} = \{1 + pt + p^r\mathbb{Z} | t \in \mathbb{Z}\}$ es un grupo multiplicativo isomorfo al grupo aditivo $p\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$.*

Demostración. Basta definir funciones inversas entre los grupos considerados. En este caso, las mismas están dadas por la función exponencial truncada $\exp_{p,r} : p\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \to U_{p,1}$ definida por

$$\exp_{p,r}(pt) = 1 + pt + \frac{(pt)^2}{2!} + \frac{(pt)^3}{3!} + \cdots + + \frac{(pt)^{r-1}}{(r-1)!}$$

y la función logaritmo truncada $\log_{p,r} : U_{p,1} \to p\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ definida por

$$\ln_{p,r}(1 + ps) = ps - \frac{(ps)^2}{2} + \frac{(ps)^3}{3} + \cdots + (-1)^r \frac{(ps)^{r-1}}{r-1}.$$

Nótese que estas funciones están bien definidas dado que los denominadores involucrados son unidades en el anillo $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$. Debemos probar que estas funciones son inversas. Para ello consideramos el anillo $\mathbb{Q}[[x]]$ de series de potencias con coeficientes racionales y su cociente $A = \mathbb{Q}[[x]]/(x^r)$. Es fácil ver que la series de potencia usuales $f(x) = e^x - 1$ y $g(x) = \ln(1 + x)$ pueden

evaluarse sin problemas en los elementos nilpotentes de A y son inversas allí. Si se definen las funciones truncadas

$$f_p(x) = x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} \quad \text{y} \quad g_p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^r \frac{x^{r-1}}{(r-1)!},$$

es fácil ver que $f(u) = f_r(u)$ y $g(u) = g_r(u)$ para todo elemento nilpotente de A. En particular, estas funciones siguen siendo inversas allí. Por la misma razón se tienen las identidades $g_r(u) + g_r(v) = g_r\Big((1+u)(1+v) - 1\Big)$ y $\Big(1 + f_r(u)\Big)\Big(1 + f_r(v)\Big) = 1 + f_r(u+v)$. Dado que los denominadores de f_r y g_r no contienen potencias de p, estas funciones se pueden restringir sin problemas al subanillo $B = \mathbb{Z}_{(p)}[[x]]/(x^r)$ de series de potencias cuyos coeficientes están en el anillo local racional. Por otro lado, para todo elemento nilpotente $u \in \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ existe una función evaluación $\phi_u : \mathbb{Z}_{(p)}[[x]] \to \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$ que se anula en x^r. Concluímos que dicha evaluación puede considerarse como una función de B a $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$. Se conluye que f_p y g_p son inversas en el conjunto de elementos nilpotentes de $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$. Esto es equivalente a la afirmación de que $\exp_{p,r}$ y $\ln_{p,r}$ son inversas. Además se tienen, en B, las identidades

$$g_r(tx) + g_r(sx) = g_r\Big((1+tx)(1+sx) - 1\Big) \qquad \text{y}$$

$$\Big(1 + f_r(tx)\Big)\Big(1 + f_r(sx)\Big) = 1 + f_r(tx + sx),$$

para todo par de enteros s y t. De aquí se concluye que $\exp_{p,r}$ y $\ln_{p,r}$ son homomorfismos de grupos. □

Puede probarse que, si $p \neq 2$, las funciones $f(px)$ y $g(px)$ tienen coeficientes en $\mathbb{Z}_{(p)}$, por lo que truncarlas no es necesario. Esto dá un isomorfismo entre los subgrupos mencionados que es independiente de la condición en r. Veremos más adelante como definir exponenciales y logaritmos en un contexto más general, por lo que esta generalización no es necesaria.

2.5 Derivadas formales

Sea C un anillo conmutativo. y sea $f(x) \in C[x]$ un polinomio con coeficientes en C. Entonces, $f(x+y)$ es un elemento del anillo de polinomios en 2 variables

$C[x,y]$. En cosecuencia, podemos escribir

$$f(x+y) = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2 + f_3(x)y^3 + \dots.$$

Evaluando en $y = 0$, se tiene $f_0(x) = f(x)$. Definimos la derivada formal mediante $\frac{d}{dx}\Big(f(x)\Big) = f'(x) = f_1(x)$. En otras palabras, $f'(x)$ es el único polinomio en x que satisface la congruencia siguiente:

$$f(x+y) \equiv f(x) + yf'(x) \pmod{y^2}.$$

A esta expresión la llamaremos la expansión de Taylor a primer orden de f.

Ejemplo 2.23. Si $f(x) = x^n$, el teorema del binomio nos dá $(x+y)^n \equiv x^n + nx^{n-1}y \pmod{y^2}$. Se concluye que $f'(x) = nx^{n-1}$.

Con esta definición, no es dificil comprobar las propiedades

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = f'(x) + g'(x), \qquad \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Por ejemplo, probaremos la última:

$$\begin{aligned} f(x+y)g(x+y) &\equiv \Big(f(x) + yf'(x)\Big)\Big(g(x) + yg'(x)\Big) \\ &\equiv f(x)g(x) + \Big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\Big)y \pmod{y^2}. \end{aligned}$$

Utilizando las propiedades anteriores, se tienen que un polinomio de la forma $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ tiene derivada dada por la fórmula usual $f'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$. Utilizando el hecho de que los polinomios pueden evaluarse en elementos de C, o, más generalmente, en elementos de cualquier anillo que contiene a C, obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.24 (Expansión de Taylor a primer orden)**.** *Sea B un anillo conmutativo que contiene a un anillo dado C, y sea $f(x) \in C[[x]]$ un polinomio. Sean $u, \epsilon \in B$ elementos arbitrarios. Entonces se tiene la congruencia siguiente:*

$$f(u+\epsilon) \equiv f(u) + f'(u)\epsilon \pmod{\epsilon^2}. \quad \square$$

Este resultado nos permite demostrar fácilmente la regla de la cadena.

Proposición 2.25 (Regla de la cadena)**.** *Si $f(x), w(x) \in C[x]$, entonces se tiene la identidad $\frac{d}{dx}\Big(f(w(x)\Big) = f'\Big(w(x)\Big)w'(x)$.*

Demostración. Sea $h = h(x,y) = w(x+y) - w(x)$, de modo que $w(x+y) = w(x) + h$. Observese que y divide a h. De la congruencia $w(x+y) \equiv w(x) + yw'(x) \pmod{y^2}$ se deduce que $h \equiv w'(x)y \pmod{y^2}$. El resultado sigue anora del siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} f\Big(w(x+y)\Big) &= f\Big(w(x)+h\Big) \\ &\equiv f\Big(w(x)\Big) + hf'\Big(w(x)\Big) \pmod{h^2} \\ &\equiv f\Big(w(x)\Big) + \Big(w'(x)y\Big)f'\Big(w(x)\Big) \pmod{y^2}. \quad \square \end{aligned}$$

Ejemplo 2.26. Mostraremos ahora como la expansión de Taylor puede utilizarse para resolver ecuaciones de congruencias. Tomemos por ejemplo la ecuación $x^2 \equiv 14 \pmod{13^2}$. Claramente la ecuación $x^2 \equiv 14 \pmod{13}$ tiene las soluciones 1 y -1, luego basta buscar soluciones del tipo $1+13t$ o $-1+13t$. Ahora bien, si $f(x) = x^2$, se tiene $f(1+13t) \equiv f(1) + 13tf'(1) \pmod{13^2}$, de donde necesitamos encontrar t tal que $14 \equiv f(1) + 13tf'(1) \equiv 1 + 13t \times 2 \pmod{13^2}$. Juntando las constantes y dividiendo por 13 se obtiene $1 \equiv 2t \pmod{13}$, luego $t \equiv 7 \pmod{13}$ o $x \equiv 1 + 7 \times 13 \equiv 92 \pmod{13^2}$. Del mismo modo se obtiene la solución $x \equiv -1 + 6 \times 13 \equiv 77 \pmod{13^2}$.

Una vez que se ha definido la derivada, podemos definir las derivadas sucesivas por inducción mediante $f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n)}(x)$. Nótese que, en la relación

$$f(x+y) = f(x) + f'(x)y + f_2(x)y^2 + f_3(x)y^3 + \ldots$$

podemos considerar ambos lados como polinomios en y con coeficientes en el anillo conmutativo $C[x]$, de modo que al derivar ambos lados se tiene

$$f'(x+y) = f'(x) + 2f_2(x)y + 3f_3(x)y^2 + \ldots,$$

y al evaluar en $y = 0$ se tiene $2f_2(x) = f''(x)$. Iterando este procedimiento se obtiene la relación $n!f_n(x) = f^{(n)}(x)$. No es posible despejar $f_n(x)$ de esta relación a no ser que $n!$ sea invertible en el anillo C. Por ejemplo, si $C = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, entonces $n!$ es invertible si y sólo si m no es divisible por ningún primo entre 1 y n.

2.6 El Lema de Hensel

El siguiente resultado nos permite encontrar raices de polinomios módulo p^n para cualquier n dada una raiz módulo p. La única condición necesaria para

esto es que la raiz no sea un punto crítico módulo p, es decir que su derivada no se anule:

Proposición 2.27 (Lema de Hensel)**.** *Sea $f(x) \in D[x]$, sea p un primo de D, y sea a un elemento de D que satisface las condiciones siguientes:*

1. $f(a) \equiv 0 \pmod{p}$,
2. $f'(a) \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Entonces existe una solución b_n de la ecuación $f(x) \equiv 0 \pmod{p^n}$, que satisface $b_n \equiv a \pmod{p}$, para todo entero n. Además, para cada valor de n, la solución b_n es única módulo p^n.

Demostración. La condición $f'(a) \not\equiv 0 \pmod{p}$ implica que $f'(a)$ tiene un inverso módulo p. Sea k este inverso. Definimos la sucesión $\{b_n\}_n$ recursivamente,mediante las relaciones siguientes:

1. $b_1 = a$.
2. $b_{n+1} = b_n - kf(b_n)$.

En particular se tienen estas propiedades:

1. $(b_n - b_{n+1}) = kf(b_n)$.
2. $f(b_{n+1}) \equiv f(b_n) - kf(b_n)f'(b_n) \left(\mod \left(kf(b_n)\right)^2\right)$.

Para demostrar la segunda afirmación, aplicamos la fórmula de Taylor a primer orden. Supongamos ahora, como hipótesis de inducción, que $f(b_n) \equiv 0 \pmod{p^n}$ y que $b_n \equiv a \pmod{p}$. Como en particular se tiene $f(b_n) \equiv 0 \pmod{p}$, la propiedad (1) arriba implica que $b_{n+1} \equiv a \pmod{p}$. Por otro lado, dado lo ya probado, la propiedad (2) nos dá

$$f(b_{n+1}) \equiv f(b_n) - kf(b_n)f'(b_n) \equiv f(b_n)\Big(1 - kf'(b_n)\Big) \pmod{p^{2n}}.$$

Aplicando nuevamente la propiedad $b_n \equiv a \pmod{p}$, se obtiene la congruencia $1 - kf'(b_n) \equiv 0 \pmod{p}$, de donde se sigue la relación $f(b_{n+1}) \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$, como se pedía. La unicidad de sigue de que en cada paso, la ecuación

$$f(b_n + tp^n) \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$$

nos dá $tp^n = kf(b_n)$ como única solución por los cálculos precedentes. □

Una consecuencia directa de lo anterior es el siguiente resultado:

Proposición 2.28. *Si b es invertible en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, entonces b es invertible en $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ para todo entero n.*

Demostración. Basta aplicar el resultado anterior a la ecuación $f(x) = bx - 1 \equiv 0 \pmod{p^n}$.

Ejemplo 2.29. Si el primo p no es 2, entonces un elemento $b \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ es un cuadrado si y sólo si es un cuadrado en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Basta aplicar el Lema de Hensel a la ecuación $f(x) = x^2 - b \equiv 0 \pmod{p^n}$.

Ejemplo 2.30. La ecuación $x^5+3x^2+x = 0$ tiene precisamente una solución de la forma $1 + 5t$ y una de la forma $5k$ en el anillo $\mathbb{Z}/5^n\mathbb{Z}$, para cada entero $n \geq 1$. En este caso, la derivada es congruente, módulo 5, a $x+1$, por lo que no se anula ni en 0 ni en 1.

Ejemplo 2.31. La ecuación $x^5+x^2+3x = 0$ tiene precisamente una solución de la forma $5k$ en el anillo $\mathbb{Z}/5^n\mathbb{Z}$, para cada entero $n \geq 1$. Sin embargo, el lema de Hensel no se pronuncia sobre las soluciones de la forma $1 + 5t$, ya que la derivada se anula, módulo 5, en 1.

2.7 El grupo de unidades módulo n.

En esta sección estudiaremos el grupo de unidades $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ del anillo de enteros módulo n. Este es un grupo abeliano finito, por lo que los teoremas de estructura para tales grupos (véase los apuntes de grupos y anillos) nos permiten escribirlo como producto cartesiano de grupos cíclicos. Sin embargo, podemos ser significativamente más explícitos aplicando los resultados vistos en este capítulo. De hecho, si $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$, el Teorema Chino de los restos nos permite obtener la descomposición siguiente:

$$\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^* \cong \prod_{i=1}^{k} \left(\mathbb{Z}/p_i^{r_i}\mathbb{Z}\right)^*.$$

Bastará, por lo tanto, calcular la estructura del anillo $\left(\mathbb{Z}/p_i^{r_i}\mathbb{Z}\right)^*$. Para ello, comenzaremos con el caso $n = 1$. Recordemos que el anillo $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ es un cuerpo.

La función ϕ de Euler se define como $\phi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*|$. El teorema chino de los restos implica que $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$ si n y m son relativamente primos. El número de elementos de un orden dado en un grupo cíclico puede calcularse fácilmente en términos de ϕ. De hecho, tenemos el siguiente resultado:

Lema 2.32. *Si m divide a n, existen $\phi(m)$ elementos de orden m en el grupo cíclico $C_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Demostración El orden $\mathrm{ord}(a)$ del elemento $a + n\mathbb{Z}$ divide a m si y sólo si $ma + n\mathbb{Z} = 0 + n\mathbb{Z}$. Es decir, $\mathrm{ord}(a)|m$ si y sólo si ma es divisible por n, o, equivalentemente, a es divisible por $m' = n/m$. En particular, $\mathrm{ord}(a) = m$ si y sólo si a es divisible por m' y no por ningún divisor de n mayor a m'. En otras palabras $(a) + (n) = (m')$. Esto es equivalente a decir que $(a/m') + (n/m') = (1)$, por lo que hay $\phi(n/m') = \phi(m)$ elecciones posibles para tal elemento a/m' módulo m, lo que nos dá $\phi(m)$ elecciones posibles para a módulo $mm' = n$. □

El siguiente corolario es inmediato, ya que todo elemento en C_n tiene un orden que divide a n:

Corolario 2.32.1. $\sum_{d|n} \phi(d) = n$.

Lema 2.33. *Si G es un grupo abeliano finito, donde hay a lo más n soluciones de la ecuación $g^n = e$ para cada n entonces G es un grupo cíclico.*

Demostración Sea $N = |G|$. Basta ver que existe un elemento de orden N. Supongamos que G tiene $\psi(n)$ elementos de orden n para cada n. Entonces $\sum_{d|N} \psi(d) = N$. Si $\psi(N) = 0$, existe algún n con $\psi(n) > \phi(n)$. Tomemos un divisor n de N minimal tal que $\psi(n) > \phi(n)$. En particular, G tiene elementos de orden n. Un elemento $g \in G$ de orden n genera un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, y por lo tanto $\psi(d) \geq \phi(d)$ para todo divisor d de n. Se concluye que el número de elementos cuyo orden divide a n es $\sum_{d|n} \psi(d) > \sum_{d|n} \phi(d) = n$. Como los elementos cuyo orden divide a n son las soluciones de $g^n = e$, la afirmación precedente contradice la hipótesis. □

Proposición 2.34. *Si K es un cuerpo arbitrario, y si Γ es un subgrupo finito de K^*, entonces Γ es cíclico.*

Demostración La hipótesis del resultado precedente es inmediata, ya que un polinomio de grado n no puede tener mas de n raices. En particular, se concluye que $x^n - 1$ no puede tener más de n raices para ningún n. □

Corolario 2.34.1. *El grupo de unidades de* $\mathbb{F}_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *es cíclico.* □

Un generador del grupo $\mathbb{F}_p^*$ recibe el nombre de raiz primitiva módulo p. Aplicando ahora los resultados de la sección precedente se obtiene el siguiente resultado:

Corolario 2.34.2. *El grupo* $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ *contiene un elemento de orden* $p-1$ *para cada entero positivo* n*.*

Demostración basta aplicar el Lema de Hensel al polinomio $f(x) = x^{p-1} - 1$, cuya derivada $f'(x) = (p-1)x^{p-2}$ es no nula para todo $x \in \mathbb{F}_p^*$. □

Lema 2.35. *Sea* k *un entero positivo. Si* p *es un primo y se cumple al menos una de las condiciones siguientes:*

1. p *es impar,*
2. $k > 1$*.*

entonces, para cada entero t *relativamente primo con* p*, se tiene* $(1+tp^k)^p = 1 + sp^{k+1}$*, para algún entero* s *relativamente primo con* p*.*

Demostración Por el teorema del binomio, se tiene lo siguiente:

$$(1 + tp^k)^p = 1 + tp^{k+1} + \binom{p}{2} t^2 p^{2k} + \cdots$$

Basta ver que todos los términos a partir del tercero son divisibles por una potencia de p mayor a $k+1$, y por lo tanto puede factorizarse como sigue:

$$(1 + tp^k)^p = 1 + p^{k+1}\left[t + p\left[\binom{p}{2} t^2 p^{k-2} + \binom{p}{3} t^3 p^{2k-2} + \cdots\right]\right].$$

Para probar la afirmación consideramos dos casos:

1. Si p es impar, entonces $\binom{p}{2}$ es divisible por p por lo que $\binom{p}{2} t^2 p^{k-2}$ es entero. Los terminos subsecuentes no representan un problema, puesto que el exponente de p es claramente no-negativo.

2. Si $k \geq 2$, ningún exponente de p en la expresión anterior puede ser negativo.

□

Corolario 2.35.1. *Si p es un primo impar, entonces $\left(\mathbb{Z}/p_i^r\mathbb{Z}\right)^*$ tiene un elemento de orden p^{r-1} para cada entero positivo r.*

Demostración Basta probar por inducción que $(1+tp^{r-k})$ tiene orden p^k, de modo que $1+p$ tiene orden p^{r-1}. Es claro que $1+tp^{r-1}$ tiene orden p, pues no es congruente a 1, pero sí lo es $(1+tp^{r-1})^p \equiv 1+tp^r \pmod{p^r}$. Si asumimos que $1+tp^{r-j}$ tiene orden p^j, para todo t relativamente primo con p, entonces el lema precedente muestra que $(1+tp^{r-j-1})^p$ tiene orden p^j. Si el orden de $1+tp^{r-j-1}$ es $p^u n_0$, entonces $u \geq j > 0$, por lo que el orden de $(1+tp^{r-j-1})^p$ es $p^{u-1}n_0$, por lo que $u = j+1$ y $n_0 = 1$. El resultado sigue. □

Corolario 2.35.2. *Si p es un primo impar, entonces $\left(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}\right)^*$ es cíclico de orden $\phi(p^n) = p^{r-1}(p-1)$.*

Demostración Como tiene un elemento de orden $p-1$ y un elemento de orden p^{r-1} el resultado sigue del isomorfismo $C_{p^{r-1}} \times C_{p-1} \cong C_{p^{r-1}(p-1)}$ (ver apuntes de grupos y anillos). □

Proposición 2.36. *para todo entero $r \geq 2$, el grupo $\left(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z}\right)^*$ es el producto de dos grupos cíclicos de orden 2 y 2^{r-2} respectivamente. Además, el primer grupo está generado por -1 y el segundo grupo está generado por 5.*

Demostración Se sigue del Lema 2.35, por el mismo argumento de antes, que $5^{2^{r-k}} = (1+4)^{2^{r-k}}$ tiene orden 2^k si $r-k \geq 2$, así que, en particular, 5 tienen orden 2^{r-2}. Además $5 \equiv 1 \pmod 4$, por lo que lo mismo ocurre con cualquier potencia. En particular, -1 no es una potencia de 5 en $\left(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z}\right)^*$. Se sigue que 5 y -1 generan un grupo isomorfo a $C_{2^{r-2}} \times C_2$. Basta ahora observar que este último grupo tiene orden $2^{r-1} = \phi(2^r)$. □

2.8 Ejercicios

1. Una ranita se ubica en una ruleta con n casillas, como la que se ilustra en la figura 2.1. Esta sólo es capaz de dar saltos en el sentido de las agujas del reloj, saltando k casillas por vez. Para que valores de n y k puede la rana recorrer cada casilla de la ruleta?

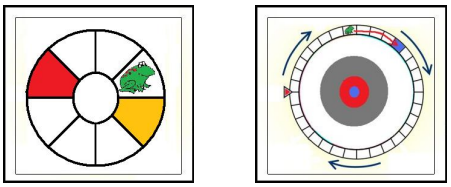


Figure 2.1: Una ranita en una ruleta.

2. Demuestre el teorema de Wilson: *Para todo primo p se tiene* $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

3. Encuentre el inverso de 183 módulo 257.

4. Encuentre el inverso de 257 módulo 1024. Utilice el resultado para encontrar el inverso de 1024 módulo 257.

5. Utilice la serie de taylor de $(1+x)^{1/2}$ para encontrar una raiz cuadrada de 23 módulo 121 y una raiz cuadrada de 7 módulo 243.

6. Resolver el sistema
$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \text{ (módulo 11)}, \\ x &\equiv 2 \text{ (módulo 17)}, \\ x &\equiv 5 \text{ (módulo 23)}. \end{aligned}$$

7. Resolver el sistema
$$\begin{aligned} 2x + 4 &\equiv 0 \text{ (módulo 11)}, \\ 3x + 5 &\equiv 0 \text{ (módulo 17)}, \\ 6x + 11 &\equiv 0 \text{ (módulo 23)}. \end{aligned}$$

8. Resolver el sistema
$$\begin{array}{ll} x \equiv 3 & (\text{mod } 7), \\ 3x \equiv -5 & (\text{mod } 11), \\ x^2 \equiv 1 & (\text{mod } 23). \end{array}$$

9. Resolver el sistema
$$\begin{aligned} x^2 + x &\equiv 0 \text{ (módulo 11)}, \\ x^2 + 2x + 1 &\equiv 0 \text{ (módulo 17)}, \\ x^2 - 1 &\equiv 0 \text{ (módulo 23)}. \end{aligned}$$

10. Resolver la ecuación $x^2 - x \equiv 0$ (módulo $11 \cdot 17 \cdot 23$).

11. Resolver la ecuación $x^2 + x + 1 \equiv 0$ (módulo $11 \cdot 17 \cdot 23$).

12. Resolver la ecuación $x^2 + x + 1 \equiv 0$ (módulo $7 \cdot 19 \cdot 39$).

13. Resolver la ecuación $x^2 + x + 1 \equiv 0$ (módulo $7^2 \cdot 19$).

14. Encontrar una unidad primitiva módulo 7, 19, y 83.

15. Si a es una raiz primitiva módulo 257, encuentre todos los posibles valores de a^{16} módulo 257.

16. Sea $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio tal que para cada primo p existe algún entero n tal que $f(n) \not\equiv 0$ (módulo p). Probar que existen infinitos primos p para los cuales la ecuación $f(x) \equiv 0$ (módulo p) tiene al menos una raiz.

17. Probar que p divide a $a^p - a$ para todo entero a.

18. Probar que un polinomio f con coeficientes enteros satisface $f(x) = g(x)^p + ph(x)$, donde g y h son polinomios con coeficientes enteros, si y sólo si $f'(x) = ps(x)$, donde s es un polinomio con coeficientes enteros.

19. Sean a, b, c, d números enteros. Probar que existen enteros x, y, z, w tales que
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$
con $r, u \equiv 1 \pmod{n}$ y $s, t \equiv 0 \pmod{n}$, si y sólo si $ad - bc$ es relativamente primo con n.

Chapter 3

Residuos cuadráticos y reciprocidad

En este capítulo estudiaremos la posibilidad de resolver ecuaciones cuadráticas módulo n, es decir ecuaciones del tipo

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{n}.$$

Por el Teorema Chino de los restos, es suficiente con resolver esta ecuación módulo p^n donde p es un primo. Para ilustrar este procedimiento consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.1. Se quieren encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática

$$x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{273}.$$

Puesto que $273 = 3 \times 7 \times 13$, es suficiente resolver la ecuación módulo cada uno de los 3 primos. Módulo 3 las solución es $x \equiv 1$. Módulo 7 las soluciones son 2 y 4. Módulo 13 las soluciones son 3 y 9. Esto significa que la solución de la ecuación original se obtiene resolviendo cada uno de los sistemas siguientes:

1. $x \equiv 1 \pmod{3}$, $x \equiv 2 \pmod{7}$, $x \equiv 3 \pmod{13}$.
2. $x \equiv 1 \pmod{3}$, $x \equiv 2 \pmod{7}$, $x \equiv 9 \pmod{13}$.
3. $x \equiv 1 \pmod{3}$, $x \equiv 4 \pmod{7}$, $x \equiv 3 \pmod{13}$.
4. $x \equiv 1 \pmod{3}$, $x \equiv 4 \pmod{7}$, $x \equiv 9 \pmod{13}$.

Las soluciones de estos sistemas son, respectivamente, $x \equiv 16, 22, 172, 254$, como se obtiene del Teorema Chino de los restos. Estas son, por lo tanto, la soluciones de la ecuación pedida.

Ejemplo 3.2. Se quieren encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática

$$x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{165}.$$

Puesto que $273 = 3 \times 5 \times 11$, es suficiente resolver la ecuación módulo cada uno de los 3 primos. Módulo 5 las solución no tiene soluciones, por lo que tampoco las tiene la ecuación original.

El Lemma de Hensel, demostrado en el capítulo anterior, permite encontrar soluciones módulo p^r, con tal de que se las conozca módulo p, a condición de que la derivada no se anule módulo p. Probaremos a contiinuación una versión más fuerte que permite encontrar soluciones módulo p^r para todo r con tal de que se las conozca módulo p^{r_0} para un elemento preciso $r_0 = a$ condición de que la derivada no se anule "demasiado":

Proposición 3.3 (Lema de Hensel, segunda versión)**.** *Sea $f(x) \in D[x]$, y sea p un primo de D, a un elemento de D, y t un entero pisitivo, que satisfacen las condiciones siguientes:*

1. $f(a) \equiv 0 \pmod{p^{2t}}$,
2. $f'(a) \not\equiv 0 \pmod{p^t}$

Entonces existe, para todo entero n, una solución b_n de la ecuación $f(a) \equiv 0 \pmod{p^n}$, que satisface $b_n \equiv a \pmod{p}$.

Demostración. La condición $f'(a) \not\equiv 0 \pmod{p^t}$ implica que $f'(a) = p^s u$ con $s < t$ y u invertible módulo p. Sea k el inverso de u. Por otro lado, $f(a) = lp^{2t}$. Sea $\epsilon = -lkp^{2t-s}$. Observemos que

$$f(a + \epsilon) \equiv f(a) + \epsilon f'(a) \equiv 0 \pmod{\epsilon^2},$$

y como $s < t$ se tiene $p^{t+1} | \epsilon$ y por lo tanto $p^{2t+2} | \epsilon^2$. De aquí se siguen las siguientes conclusiones:

- $f(a + \epsilon) \equiv 0 \pmod{p^{2t+2}}$ y
- $f'(a + \epsilon) \equiv f'(a) + \epsilon f''(a) \equiv f'(a) \pmod{p^t}$.

Ahora el resultado se concluye por una inducción, muy similar a la utilizada para demostrar la primera versión. Los detalles se dejar al lector. □

Ejemplo 3.4. Sea a un entero impar. La ecuación $x^2 - a = 0$ tiene una solución módulo 2^r para todo r, con tal de que tenga una solución módulo $16 = 2^4$, ya que $2c \not\equiv 0 \pmod 4$ para todo entero impar c. De hecho una busqueda exhaustiva prueba que los cuadrados impares son 1 y 9, por lo que basta verificar si un entero impar es congruente a 1 módulo 8 para que $x^2 - a = 0$ tenga una solución módulo 2^r para todo r.

Tomemos ahora la ecuación cuadrática general, y veamos que se necesita exactamente para resolverla. Partimos de la ecuación

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p^t}.$$

El caso más sencillo se obtiene cuando p no divide a a y $p \neq 2$. En este caso las raices son de la forma

$$x = \frac{-b + \delta}{2a}$$

donde δ satisface $\delta^2 = b^2 - 4ac$. Nótese que el denominador de la fracción debe entenderse en términos de inversos módulo n, como se discutió en el capítulo precedente. Se obtiene de cualquiera de las dos versiones del Lema de Hensel que $b^2 - 4ac$, si es invertible, es un cuadrado módulo p^r si y sólo si es un cuadrado módulo p. Si $b^2 - 4ac \equiv 0 \pmod{p^r}$, las raices son de la forma $p^s u$ con $2s \geq r$. Si p divide a $b^2 - 4ac$, pero p^r no lo hace, la situación es algo más compleja. Podemos escribir $b^2 - 4ac = p^r n_0$, y comparar esto con la ecuación $(p^s m)^2 = p^{2s} m^2$. Concluimos que $b^2 - 4ac$ es un cuadrado precisamente cuando r es par y n_0 es un cuadrado módulo p.

Cuando p divide a a, digamos $a = pa_0$, la ecuación puede re-escribirse como $pa_0x^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p^t}$. Multiplicando por p se tiene la ecuación equivalente $a_0(px)^2 + b(px) + pc \equiv 0 \pmod{p^{t+1}}$. Por lo tanto la ecuación original tendrá soluciones si y sólo si $a_0y^2 + by + pc \equiv 0 \pmod{p^{t+1}}$ tiene soluciones divisibles por p. Este procedimiento puede repetirse las veces que sea necesario, hasta reducirnos a los casos ya analizados.

El caso mas difícil aparece cuando $p = 2$. En este caso, es todavía cierto que $2ax = \delta - b$ donde $\delta^2 = b^2 - 4ac$. Aún en este caso puede procederse como en el caso anterior, encontrando primero los posibles valores de δ y comprobando a posteriori si los valores obtenidos de $\delta - b$ son divisibles por $2a$. El análisis de si un elemento es o no un cuadrado debe realizarse por

separado en los casos 2, 4 y 8. Esto trae algunas dificultades adicionales cuando $b^2 - 4ac$ es par. Por ejemplo, $4n^0$, con n_0 impar, es un cuadrado módulo 32 si y sólo si $n_0 \equiv 1$ módulo 8, pero la misma ecuación módulo 16 sólo requiere el estudio de n_0 módulo 4. Estos detalles suelen ser sencillos y la formulación precisa de todos los casos posibles se le deja al lector interesado.

Nótese que lo anterior nos permite resolver una ecuación cuadrática en todos los casos siempre y cuando seamos capaces de encontrar las raices de cualquier número módulo p. Esto no necesariamente es sencillo para p grande. Pero al menos existe un procedimiento sencillo para determinar si una ecuación de la forma $x^2 \equiv a$ tiene o no soluciones módulo p. Esto es lo que nos dá la ley de reciprocidad cuadrática, la que estudiaremos en la sección siguiente.

3.1 La ley de reciprocidad cuadrática

Sea p un número primo impar y sea a un número entero relativamente primo a p. El símbolo de Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$ es por definición el entero

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & \text{si } \ a \text{ es un cuadrado módulo } p \\ -1 & \text{si } \ a \text{ no es un cuadrado módulo } p \end{array} \right\}.$$

Nótese que determinar si a es o no un cuadrado módulo p es equivalente a calcular el símbolo de Legendre correspondiente. Como $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ es un grupo cíclico de orden $p-1$ generado por un elemento primitivo η, obtenemos que $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ si y sólo si $a = \eta^r$ es una potencia par de η, o equivalentemente, si $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \eta^{\frac{r(p-1)}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$. Se concluye que

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod{p}.$$

Una consecuencia inmediata de esta última relación es la identidad multipicativa $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$. Nótese que, si $p > 2$, los enteros 1 y -1 no son congruentes módulo p. De otro modo la conclusión no seguiría. También es inmediata la relación siguiente:

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

El cálculo de $\left(\frac{2}{p}\right)$ es algo más complejo. La demostración dada aquí requiere calcular congruencias módulo p en el anillo de enteros de Gauss

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Las propiedades de este anillo, y otros similares, se estudiarán con más detalle en capítulos subsecuentes. Por el momento, nos basta la definición de arriba. El lector podrá comprobar sin problemas que este conjunto es realmente un anillo.La identidad $p(a + bi) = pa + (pb)i$ nos dice que las congruencias módulo p pueden estudiarse coordenada a coordenada. En particular, como $2 = (-i)(1 + i)^2$, podemos re-escribir

$$2^{\frac{p-1}{2}}(1 + i) = (1 + i)^p(-i)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (1 + i^p)(-i)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p},$$

donde la congruencia $(1 + i)^p \cong 1 + i^p$ se justifica porque p divide a cada coeficiente de la expansión binomial. Como p es impar, i^p es siempre un imaginario puro, pero tanto i^p como $(-i)^{\frac{p-1}{2}}$ dependen de la clase de congruencia de p módulo 8. Tomando la parte real a ambos lados de la ecuación

$$2^{\frac{p-1}{2}}(1 + i) \equiv (1 + i^p)(-i)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p},$$

en cada uno de los cuatro casos, se obtienen los resultados siguientes:

- Si $p \equiv 1 \pmod 8$, se tiene $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv Re[(1 + i)(1)] \pmod p$, por lo que se concluye que $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$.
- Si $p \equiv 5 \pmod 8$, se tiene $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv Re[(1 + i)(-1)] \pmod p$, por lo que se concluye que $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$.
- Si $p \equiv 3 \pmod 8$, se tiene $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv Re[(1 - i)(-i)] \pmod p$, por lo que se concluye que $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$.
- Si $p \equiv 7 \pmod 8$, se tiene $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv Re[(1 - i)(i)] \pmod p$, por lo que se concluye que $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$.

En cada caso podemos escribir $p = 2t + 1$, de modo que un cálculo simple nos muestra que $\frac{p^2-1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2} = \frac{t(t+1)}{2}$. Este último número es par

precisamente cuando t es congruente a 3 o 0 módulo 4, es decir cuando p es congruente a 7 o 1 módulo 8. De aquí se deduce la fórmula siguiente:

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

El cálculo de los Símbolos de Legendre puede terminarse, en todos los casos, si podemos calcular $\left(\frac{q}{p}\right)$ para cualquier primo impar q. Una herramienta que nos permite hacer esto es la ley de reciprocidad cuadrática:

Proposición 3.5 (Ley de Reciprocidad Quadrática)**.** *Si p y q son enteros primos positivos impares, entonces*

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Demostración. La siguiente demostración se debe a Sey Y. Kim. Para cada conjunto finito de enteros T, escribimos $A_T = \prod_{n\in T} n$. Consideremos los tres conjuntos siguientes:

$$\Phi = \left\{ a \middle| 1 \leq a \leq \frac{pq-1}{2},\ (a, pq) = 1 \right\},$$

$$\Psi = \left\{ a \middle| 1 \leq a \leq \frac{pq-1}{2},\ (a, p) = 1 \right\},$$

$$X = \left\{ qt \middle| 1 \leq t \leq \frac{p-1}{2} \right\}.$$

Claramente $\Psi = \Phi \cup X$, y la unión es disjunta, de donde $A_\Psi = A_\Phi A_X$. Nótese que hemos usado la identidad $\frac{pq-1}{2} = p\frac{q-1}{2} + \frac{p-1}{2} = q\frac{p-1}{2} + \frac{q-1}{2}$, que es también importante en lo que sigue.

Para cada entero t definimos dos conjuntos adicionales:

$$\Psi_t = \left\{ n + pt \middle| 1 \leq n \leq p-1 \right\}, \qquad \Psi'_t = \left\{ n + pt \middle| 1 \leq n \leq \frac{p-1}{2} \right\},$$

de modo que, podemos escribir $\Psi = \Psi'_{(q-1)/2} \cup \bigcup_{t=0}^{(q-2)/2} \Psi_t$, y esta unión es disjunta. Concluimos que $A_\Psi = A_{\Psi_0} \cdots A_{\Psi_{(q-2)/2}} A_{\Psi'_{(q-1)/2}}$. Por otro lado, por el teorema de Wilson (Ejercicio 2 del capítulo precedente), se obtiene la

identidad $A_{\Psi_t} \equiv -1 \pmod{p}$ para cada entero t. Concluimos la identidad siguiente:

$$A_\Psi \equiv (-1)^{(q-1)/2} \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p}.$$

Analogamente se obtiene la identidad

$$A_X = q^{(p-1)/2} \left(\frac{p-1}{2}\right)! \equiv \left(\frac{q}{p}\right) \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p}.$$

Combinando estas dos relaciones con $A_\Psi = A_\Phi A_X$, y luego aplicando la simetría en p y q, obtenemos las siguientes relaciones:

$$A_\Phi \equiv (-1)^{(q-1)/2} \left(\frac{q}{p}\right) \pmod{p} \quad \text{y} \quad A_\Phi \equiv (-1)^{(p-1)/2} \left(\frac{p}{q}\right) \pmod{q}.$$

Si $A_\Phi \equiv 1 \pmod{p}$ y $A_\Phi \equiv 1 \pmod{q}$, entonces $A_\Phi \equiv 1 \pmod{pq}$. Del mismo modo, si $A_\Phi \equiv -1 \pmod{p}$ y $A_\Phi \equiv -1 \pmod{q}$, entonces $A_\Phi \equiv -1 \pmod{pq}$. Los restantes casos producen las otras dos soluciones, K y $-K$, de la equación de congruencias $x^2 \equiv 1 \pmod{pq}$. En particular $A_\Phi \equiv \pm 1 \pmod{pq}$ si y sólo si $(-1)^{(q-1)/2}(-1)^{(p-1)/2} = \left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)$.

Afirmación: *$A_\Phi \equiv \pm 1$ si y sólo si $p \equiv q \equiv 1 \pmod{4}$.*

Para cada elemento $n \in \Phi$ existe un único $n' \in \Phi$ que satisface la congruencia $nn' \equiv \pm 1 \pmod{pq}$. De hecho, para cada clase de congruencia invertible c, exactamente una clase, c o $-c$, tiene un representante en Φ, y esto se aplica, en particular, al inverso de n. Definamos ahora un último conjunto:

$$\Omega = \{n \in \Phi | n = n'\} = \{n \in \Phi | n^2 \equiv \pm 1\}.$$

Como $nn' = \pm 1$, se tiene $A_\Phi \equiv \pm A_\Omega \pmod{pq}$. Cuando $p \equiv q \equiv 1$, $\Omega = \{a, b, c, d\}$ donde $a = 1$, $b = \pm K$, $a = \pm L$, y $b = \pm KL$, para algún L que satisface $L^2 \equiv -1 \pmod{pq}$. En este caso $A_\Omega \equiv \pm K^2 L^2 \equiv \pm 1 \pmod{pq}$. De otro modo $L^2 \equiv -1 \pmod{pq}$ no tiene soluciones, por lo que $\Omega = \{a, b\}$ y $A_\Omega \equiv \pm K \pmod{pq}$. Esto prueba la afirmación.

La demostración se termina ahora si probamos que la identidad

$$(-1)^{(q-1)/2}(-1)^{(p-1)/2} = (-1)^{\frac{(q-1)(p-1)}{4}}$$

es equivalente a $p \equiv q \equiv 1 \pmod{4}$. Esto es inmediato de la Tabla 3.1. □

En el siguiente ejemplo vemos como la ley de reciprocidad permite el cálculo de símbolos de Legendre:

$p \pmod 4$	$q \pmod 4$	$(-1)^{(q-1)/2}$	$(-1)^{(p-1)/2}$	$(-1)^{\frac{(q-1)(q-1)}{4}}$
1	1	1	1	1
3	1	-1	1	1
1	3	1	-1	1
3	3	-1	-1	-1

Table 3.1: El cálculo caso a caso requerido para terminar la demostración de la Ley de Reciprocidad Cuadrática.

Ejemplo 3.6. Calcularemos $\left(\frac{181}{211}\right)$. Por la ley de reciprocidad, se tiene

$$\left(\frac{181}{211}\right) = \left(\frac{211}{181}\right) = \left(\frac{30}{181}\right) = \left(\frac{2}{181}\right)\left(\frac{3}{181}\right)\left(\frac{5}{181}\right) =$$

$$-\left(\frac{3}{181}\right)\left(\frac{5}{181}\right) = -\left(\frac{181}{3}\right)\left(\frac{181}{5}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = -1.$$

La conclusión es que 181 no es un cuadrado módulo 211.

3.2 El Símbolo de Jacobi

El cálculo al final de la sección precedente fué sencillo sólo porque los primos involucrados eran pequeños. El cálculo de Símbolos de Legendre mediante la Ley de Reciprocidad Cuadrática nos obliga a factorizar en cada paso. A fin de evitar esto se introduce el Símbolo de Jacobi. Si m y n son números impares, este se define como sigue:

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{p_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{m}{p_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{m}{p_r}\right)^{\alpha_r},$$

donde $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ es la descomposición de n en números primos (también impares, por cierto). De hecho los símbolos de Jacobi satisfacen propiedades similares a las de los símbolos de Legendre, por ejemplo, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.7. *Si n es un entero positivo impar, entonces* $\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$.

Demostración. Un cálculo directo, a partir de la definición, nos dá lo siguiente:

$$\left(\frac{-1}{n}\right) = \left(\frac{-1}{p_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{-1}{p_r}\right)^{\alpha_r} = (-1)^{\alpha_1 \frac{p_1-1}{2} + \cdots + \alpha_r \frac{p_r-1}{2}}.$$

Para concluir la demostración, es suficiente probar la siguiente congruencia:

$$\alpha_1(p_1 - 1) + \cdots + \alpha_r(p_r - 1) \equiv n - 1 \pmod 4.$$

Esto se hace por inducción en $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r$. Para esto, se utiliza repetidamente la identidad siguiente:

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n_1 n_2 - 1 - (1 - n_1)(1 - n_2) \equiv n_1 n_2 - 1 \pmod 4,$$

la que es válida para cualquier par de números impares n_1 y n_2, ya que $1 - n_1$ y $1 - n_2$ son pares. Dejamos los detalles al lector. □

Proposición 3.8. *Si n es un entero positivo impar, entonces* $\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$.

Demostración. En este caso el razonamiento es análogo al anterior, pero debe usarse la congruencia

$$(n_1^2 - 1) + (n_2^2 - 1) = n_1^2 n_2^2 - 1 - (1 - n_1^2)(1 - n_2^2) \equiv (n_1 n_2)^2 - 1 \pmod{16}.$$

□

En la congruencia de arriba, 16 puede remplazarse por 64, pero no es necesario. El último resultado es la Ley de Reciprosidad cuadrática:

Proposición 3.9 (Ley de Reciprocidad Quadrática Para Simbolos de Jacobi.)**.** *Si n y m son enteros positivos e impares, entonces*

$$\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{m-1}{2}}.$$

Demostración. Asumiremos que $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ y $m = q_1^{\beta_1} \cdots q_s^{\beta_s}$. Un cálculo directo nos dá lo siguiente:

$$\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{m}{n}\right) = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s}\left[\left(\frac{p_i}{q_j}\right)\left(\frac{q_j}{p_i}\right)\right]^{\alpha_i\beta_j} = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s}(-1)^{\left(\alpha_i \frac{p_i-1}{2}\right)\left(\beta_j \frac{q_j-1}{2}\right)}$$

$$= (-1)^{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\left(\alpha_i \frac{p_i-1}{2}\right)\left(\beta_j \frac{q_j-1}{2}\right)} = (-1)^{\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i \frac{p_i-1}{2}\right)\left(\sum_{j=1}^{s}\beta_j \frac{q_j-1}{2}\right)}.$$

Desde aquí, el resultado se concluye utilizando las mismas congruencias de antes. □

El principal uso de los Símbolos de Jacobi es que simplifican los cálculos, ya que no es necesario comprobar a cada paso que los números involucrados son primos. Basta con comprobar que son impares, y para ello basta mirar el último dígito.

Ejemplo 3.10. Calcularemos $\left(\frac{541}{653}\right)$. Por la ley de reciprocidad, se tiene

$$\left(\frac{541}{727}\right) = \left(\frac{727}{541}\right) = \left(\frac{186}{541}\right) = \left(\frac{2}{541}\right)\left(\frac{93}{181}\right) = -\left(\frac{93}{181}\right) =$$

$$-\left(\frac{181}{93}\right) = -\left(\frac{-5}{93}\right) = -\left(\frac{-1}{93}\right)\left(\frac{5}{93}\right) = -(1)\left(\frac{93}{5}\right) = -\left(\frac{3}{5}\right) = 1.$$

Una precaución, sin embargo, es importante. Si n no es un número primo, el número $\left(\frac{m}{n}\right)$ puede ser 1 sin que m sea un cuadrado módulo n. El símbolo de Jacobi tiene una utilidad estrictamente computacional.

Ejemplo 3.11. El número 3 no es un cuadrado módulo 5 ni módulo 7. Por un lado, esto prueba que $x^2 \equiv 3 \pmod{35}$ no tiene soluciones. Por otro lado $\left(\frac{3}{35}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{7}\right) = (-1)^2 = 1$.

3.3 Ejercicios

1. Calcule los posibles valores del número de soluciones en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de la ecuación $x^2 + ax + b = 0$, si n es el producto de siete primos distintos.

2. Determine si 1492 es o no un cuadrado módulo 2017 puede utilizar como conocido el hecho de que 2017 es primo.

3. Probar que 3 es un cuadrado módulo un primo p si y sólo si p es congruente a 1 o -1 módulo 12.

4. Determine para que valores del primo p el polinomio $x^2 + x + 1$ tiene soluciones módulo p.

5. Calcule los símbolos de Jacobi $\left(\frac{495}{177}\right)$, $\left(\frac{877}{895}\right)$ y $\left(\frac{3072}{4061}\right)$.

6. Determine si 148 es o no un cuadrado módulo $10.379 = 97 \times 107$. Justifique.

7. Probar en detalle que el símbolo de Jacobi es multiplicativo, es decir $\left(\frac{k_1 k_2}{n}\right) = \left(\frac{k_1}{n}\right)\left(\frac{k_2}{n}\right)$.

8. Probar que si n y m son enteros impares, y si $\left(\frac{m}{n}\right) = -1$, entonces m no es un cuadrado módulo n.

Chapter 4

Polinomios y extensiones de anillos

En este capítulo introduciremos el concepto de extensión de anillo, con el propósito explicito de definir extensiones del anillo $\mathbb{Z}$ de enteros, y eventualmente introducir el anillo de enteros en un cuerpo de números. Antes de esto, necesitamos repasar las propiedades básicas de los anillos de polinomios.

Por definición, el anillo de polinomios $C[x]$ sobre un anillo conmutativo C (unitario o no), se define como el anillo de todas las sumas formales finitas del tipo:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots + a_nx^n,$$

Con $a_0, a_1, \ldots, a_n \in C$. Para ciertos fines, es conveniente agregar algunos coeficientes nulos al final de la expresión anterior. Por convención, esto no tiene ningún efecto rn el polinomio. Esto permite definir la suma de dos polinomios de manera concisa. Específicamente, si $f(x) = a_0 + \cdots + a_nx^n$ y $g(x) = b_0 + \cdots + b_mx^m$, con $m \leq n$, podemos rellenar los coeficientes de g con ceros y escribir

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots (a_n + b_n)x^n,$$

donde $b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = b_n = 0$. Del mismo modo, el producto se define mediante $f(x)g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_Nx^N$, donde c_n se define por las formulas $c_0 = a_0b_0$, $c_1 = a_0b_1 + a_1b_0$, etcétera. La fórmula general para estos coeficientes es $c_t = \sum_{k=0}^{t} a_kb_{t-k}$. Es fácil ver que $c_N = 0$ si $N > n + m$, por lo que basta tomar la suma hasta $n + m$ en la fórmula que define el

producto. El último coeficiente en tal suma será $c_{n+m} = a_n b_m$, ya que los otros términos en la suma que define c_{n+m} tienen un factor nulo. Por cierto, este coeficiente podría anularse si C no es un dominio de integridad, pero es el último término que no estamos seguros que se anule antes de calcular. Cuando C es un dominio, se tiene siempre $c_{n+m} \neq 0$, en tanto $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$. En este caso se concluye que el grado de un polinomio satisface la conocida identidad $\deg(fg) = \deg f + \deg g$. En el caso general, sólo podemos afirmar que $\deg(fg) \leq \deg f + \deg g$. Con estas definiciones, el anillo de polinomios es un anillo conmutativo. Si C es unitario, también lo es $C[x]$. La unidad de $C[x]$ es el polinomio constante $1_{C[x]} = 1 = 1 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n$. Por lo general, no escribiremos los términos con coeficiente 0, ni los coeficientes 1 que multipliquen una potencia no trivial de x. Estas convenciones están totalmente estandarizadas por lo que esperamos que quien lea esté familiarizado con ellas.

4.1 La propiedad universal y sus consecuencias

Nos queda una última propiedad del anillo de polinomios con la que esperamos que el lector esté familiarizado. Esta es, sin duda, la principal razón por la que el anillo de polinomios es importante para el algebrista:

> **Propiedad Universal del Anillo de Polinomios.** *Si $\phi : C \to B$ es un homomorfismo de anillos, donde C es conmutativo, dado cualquier $a \in B$ que conmuta con cada imagen $\phi(c)$ con $c \in C$, existe un homomorfismo de anillos $\tilde{\phi}_a : C[x] \to B$ que lleva a x en a y cuya restricción a C es ϕ.*

La principal aplicación del principio anterior que utilizaremos en lo sucesivo es la siguiente:

> **Evaluación de Polinomios.** *Si B es un anillo que contiene al anillo conmutativo C como un subanillo, dado cualquier $a \in B$ existe un homomorfismo de anillos $\tilde{\phi}_a : C[x] \to B$ que lleva a x en a y cuya restricción a C es la identidad.*

En este último caso, la imagen $\tilde{\phi}_a\Big(f(x)\Big)$ se denota simplemente $f(a)$, y a la función $\tilde{\phi}_a$ se la denomina evaluación en a. Una consecuencia del

hecho de que ϕ_a sea un homomorfismo es que $f(a)g(a) = g(a)f(a)$ para todo $a \in B$. En otras palabras, polinomios en la misma variable conmutan. El caso no conmutativo no será necesario en estas notas hasta llegar a la teoría de órdenes en un capítulo muy posterior.

Lo anterior puede generalizarse a cualquier número finito de variables. Por simplicidad, damos aquí sólo la versión conmutativa:

> **Propiedad Universal del Anillo de Polinomios en n variables.** *Sea B y C anillos conmutativos, y sea $\phi : C \to B$ un homomorfismo. Si $a_1, \ldots, a_n$ son elementos arbitrarios de B, entonces existe una funcion*
>
> $$\tilde{\phi} : C[x_1, \ldots, x_n] \to B$$
>
> *que lleva a x_i en a_i y cuya restricción a C es ϕ.*

Una aplicación muy importante del resultado anterior, que sigue fácilmente usando expansiones de Taylor de polinomios a coeficientes reales es la siguiente:

> **Principio de extensión de identidades.** *Toda identidad entre polinomios $f, g \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ del tipo $f(a_1, \ldots, a_n) = g(a_1, \ldots, a_n)$ que se cumple para valores reales de las variables se cumple en cualquier anillo conmutativo.*

Algunos ejemplos de identidades de este tipo son las siguientes:

1. El teorema del binomio.
2. La identidad $A\tilde{A} = \det(A)I_n$, donde A es una matriz de n por n e I_n es la identidad.
3. La multiplicatividad del determinante.

Se sigue del principio de extensión que estas identidades se cumplen en todo anillo conmutativo. En particular, de los ejemplos 2 y 3 se sigue que un elemento de $\mathbb{M}_n(C)$ es invertible si y sólo si su determinante lo es, en cuyo caso su inverso es $[\det C]^{-1}\tilde{C}$.

Ejemplo 4.1. La matrix

$$\begin{pmatrix} \bar{5} & \bar{4} & \bar{8} \\ \bar{7} & \bar{3} & \bar{6} \\ \bar{5} & \bar{5} & \bar{5} \end{pmatrix}$$

con coeficientes en $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ es invertible. Dejamos como ejercicio para el lector el cálculo de su inverso.

Sea B un anillo que contiene a C como subanillo. Sea a un elemento de B. el anillo generado por a sobre C es el subanillo más pequeño de B que contiene a C y a a y se le denota por $C[a]$. Puede también caracterizarse como la imagen del homomorfismo evaluación $\phi_a : C[x] \to B$. En particular $C[a] \cong C[x]/\ker(\phi_a)$.

Ejemplo 4.2. Para todo anillo conmutativo C y todo elemento $c \in C$ se tiene $C = C[c] \cong \frac{C[x]}{(x-c)}$.

Ejemplo 4.3. El anillo $\mathbb{Z}[i]$ es el anillo de números complejos de la forma $a + bi$ con a y b enteros, ya que $i^n \in \{1, -1, i, -i\}$ para todo n. Se sigue del resultado anterior que $\mathbb{Z}[i] \cong \mathbb{Z}[x]/I$ donde I es el núcleo de la evaluación en i. De hecho, probaremos más abajo que $I = (x^2 + 1)$.

Ejemplo 4.4. El anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ es el anillo de números reales de la forma $a + b\sqrt{2}$ con a y b enteros, ya que $(\sqrt{2})^n \in \mathbb{Z} \cup \sqrt{2}\mathbb{Z}$ para todo n. Se sigue del resultado anterior que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cong \mathbb{Z}[x]/I$ donde I es el núcleo de la evaluación en $\sqrt{2}$. De hecho, probaremos más abajo que $I = (x^2 - 2)$.

Mas generalmente, si $a_1, \ldots, a_n$ son elementos de B, el anillo $C[a_1, \ldots, a_n]$ es la imagen del homomorfismo evaluación $\phi_{a_1,\ldots,a_n}$ y se tiene $C[a_1, \ldots, a_n] \cong C[x_1, \ldots, x_n]/\ker(\phi_{a_1,\ldots,a_n})$.

Ejemplo 4.5. Si $a_1, \ldots, a_n$ no satisfacen ninguna ecuación con coeficientes en C, el homomorfismo evaluación $\phi_{a_1,\ldots,a_n}$ es inyectivo y en tal caso se dice que $a_1, \ldots, a_n$ son algebraicamente independientes sobre C. El anillo generado por n elementos algebraicamente independientes es isomorfo al anillo de polinomios, ya que el homomorfismo evaluación es inyectivo. Es posible, aunque no sencillo, demostrar que $e = 2,7172\ldots$ y $e^{\sqrt{2}}$ son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Z}$. Si $\{a\}$ es algebraicamente independiente como conjunto unitario, se dice que a es trascendente sobre C. El número real $\pi = 3,14159\ldots$ es un ejemplo de número tascendente sobre $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$.

4.2 El algoritmo de la división

En esta ssección introduciremos algunas herramientas que resultan cruciales en la demostración de los ejemplos mostrados en la sección anterior. Recuérdese que un polinomio mónico es aquel cuyo coeficiente principal (o de mayor grado) es uno.

Proposición 4.6. *Si f y g son dos polinomios en $C[x]$, con f mónico, entonces* $\deg(fg) = \deg f + \deg g$.

Demostración. Asumamos que $f(x) = x^n + \cdots$, donde los puntos representan términos de grado menor, y $g(x) = ax^m + \cdots$. Entonces $f(x)g(x) = ax^{n+m} + \cdots$, de donde se sigue el resultado. □

Proposición 4.7. *Si u satisface un polinomio mónico f de grado d con coeficientes en C, entonces todo elemento a de $C[u]$ puede escribirse en la forma $a = r(u)$ con* $\deg(r) < d$.

Demostración. Basta probar que, para todo polinomio $h(x) \in C[x]$ existe un polinomio r con $\deg(r) < d$ que satisface $h(u) = r(u)$. Si $\deg(h) < d$ no hay nada que probar, por lo que suponemos que $h(x) = ax^n + \ldots$, donde los puntos representan términos de grado menor, y que $\deg(h) = n > \deg(f)$. Entonces $h_1(x) = h(x) - af(x)$ es un polinomio de grado menor a h y que satisface $h_1(u) = h(u)$. Se sigue ahora del principio de inducción completa que existe un polinomio $r(x)$ de grado menor a f tal que $r(u) = h_1(u) = h(u)$. □

Proposición 4.8 (Algoritmo de división para polinomios mónicos)**.** *Si f es un polinomio mónico de grado d con coeficientes en C, entonces todo elemento $h(x) = C[x]$ puede escribirse de manera única en la forma $h(x) = r(x) + q(x)f(x)$ con* $\deg(r) < \deg(f)$.

Demostración. Para probar la existencia consideramos la clase lateral $u = x + (f) \in C[x]/(f)$. Claramente $f(u) = 0$ en el anillo cociente. El resultado precedente nos dice que $h(x)+(f) = h(u) = r(u)$ para algún polinomio r con $\deg(r) < d$. La condición $h(u) = r(u)$ nos dice que $h(x) - r(x) \in (f)$, por lo que podemos escribir $h(x) - r(x) = q(x)f(x)$. Esto prueba la existencia. Para la unicidad observamos que $q(x)f(x) + r(x) = q'(x)f(x) + r'(x)$ implica

$f(x)\Big(q(x)-q'(x)\Big)=r'(x)-r(x)$. Como f no puede dividir a un polinomio no trivial de menor grado, debemos tener $r'(x)=r(x)$. Del mismo modo, la multiplicación por f no puede anular a un polinomio no trivial. Concluímos que $q(x)=q'(x)$. □

Ejemplo 4.9. El número complejo i satisface la ecuación polinomica $x^2+1=0$. Se sigue del resultado anterior que todo elemento de $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$ se escribe de manera única en la forma $a+b\bar{x}$ con a y b enteros. Como $a+bi\neq 0$ para cada par de enteros a y b, se sigue que (x^2+1) es el núcleo de la evaluación en i y por lo tanto $\mathbb{Z}[i]\cong\mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$. En particular, cada elemento del anillo $\mathbb{Z}[i]$ puede escribirse el la forma $a+bi$ con a y b enteros.

Ejemplo 4.10. El número irracional $\sqrt{2}$ satisface la ecuación polinomica $x^2-2=0$. Se sigue del resultado anterior que todo elemento de $\mathbb{Z}[x]/(x^2-2)$ se escribe de manera única en la forma $a+b\bar{x}$ con a y b enteros. Se sigue como en el ejemplo precedente que (x^2-2) es el núcleo de la evaluación en $\sqrt{2}$ y por lo tanto $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\cong\mathbb{Z}[x]/(x^2-2)$, mientras que cada elemento de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ tiene la forma $a+b\sqrt{2}$ con a y b enteros.

Los resultados y ejemplos de esta sección motivan la siguiente definición que será crucial en lo que sigue. Un elemento b de un anillo B, que contiene a un subanillo C, se dice entero sobre C, si satisface un polinomio mónico con coeficientes en C.

Ejemplo 4.11. El anillo $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ es el anillo de números racionales de la forma $\frac{n}{2^t}$ con n entero. En este caso, es imposible escribir $\frac{1}{2^t}$ como un polinomio en $\frac{1}{2}$ de grado menor a t. Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes enteros tal que $f(\frac{1}{2})=0$. Si $f(x)=a_nx^n+\ldots+a_0$, se deduce desarrollando $2^nf(\frac{1}{2})$ que 2 divide a a_n. Luego $f(x)-(2x-1)\frac{a_n}{2}x^{n-1}$ es un polinomio de grado menor que f que cumple la misma propiedad. Se concluye por inducción que $f(x)$ es divisible por $2x-1$. Luego $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]\cong\mathbb{Z}[x]/(2x-1)$.

El anterior es un ejemplo típico de anillo generado por un elemento no entero. Para tratar anillos como este, probaremos una generalización del resultado anterior:

Proposición 4.12. *Si $f(x)=a_dx^d+\ldots$ es un polinomio de grado d con coeficientes en C, y si S es un conjunto completo de representantes de $C/(a_d)$ que incluye al 0, entonces todo elemento $h(x)\in C[x]$ de grado m puede*

escribirse en la forma $r(x) + x^d g(x) + q(x)f(x)$ *donde* $\deg(r) < \deg(f)$ *y* $g(x)$ *es un polinomio de grado no mayor a* $m - d$ *con coeficientes en* S*. Si* a_d *no es un divisor de* 0 *esta representación es única.*

Demostración. Supongamos que $h(x)$ es un elemento de $C[x]$ con $h(x) = bx^m + \ldots$, con las convenciones anteriores. Entonces existe $s \in S$ con $b - s = ta_d$ para algún $t \in C$. Luego $h(x) - sx^m - tx^{m-d}f(x)$ tiene grado menor que h y se concluye por inducción completa como en la proposición anterior. Para probar la unicidad, supongamos que

$$h(x) = r(x) + x^d g(x) + q(x)f(x) = r_0(x) + x^d g_0(x) + q_0(x)f(x),$$

donde los elementos de $\{r, r_0\}$ tienen grado menor a d ,mientras que los de $\{g, g_0\}$ tienen grado no mayor a $m-d$ y coeficientes en S. Entonces tenemos

$$[q_0(x) - q(x)]f(x) = [r(x) - r_0(x)] + x^d[g(x) - g_0(x)]. \tag{4.1}$$

Supongamos que $q_0(x) \neq q(x)$. Sea $q_0(x) - q(x) = bx^r + \ldots$, con la convención usual. El término de mayor grado en $[q_0(x) - q(x))](x)$ es abx^{r+d}. El polinomio $g(x) - g_0(x)$ no puede tener ningún coeficiente no nulo divisible por a, y los términos de grado mayor o igual a d en el lado derecho de (4.1) son exactamente los términos de $x^d[g(x) - g_0(x)]$. Se concluye, por contradicción, que $q_0(x) = q(x)$, luego

$$r(x) - r_0(x) = -x^d[g(x) - g_0(x)].$$

Como el lado izquierdo tiene sólo términos de grado menor que d y el lado derecho tiene sólo términos de grado mayor o igual a d, deben ser ambos 0. El resultado sigue. □

Ejemplo 4.13. El conjunto $\{0, 1\}$ es un conjunto de repreentantes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Se sigue que, en el anillo $\mathbb{Z}[x]/(2x)$, cada elemento tiene una única representación de la forma $n + \bar{x}^{i_1} + \ldots + \bar{x}^{i_s}$ con $n \in \mathbb{Z}$ y enteros positivos $i_1, \ldots, i_s$ distintos. Este elemento no puede representarse por un polinomio de grado inferior al máximo de los i_t. De hecho, este anillo es isomorfo al subanillo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$ formado por los pares $\Big(n, F(x)\Big)$ en los que la imagen de n en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ es $F(0)$. Para comprobar esto basta considerar el homomorfismo

$$\phi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$$

que envía a $f(x)$ en $\Big(f(0), \overline{f(x)}\Big)$, donde la barra horizontal indica reducción módulo 2. Es evidente que cada imagen es un par de la forma dada, y para encontrar una pre-imagen de uno de estos pares $\Big(n, F(x)\Big)$ se utiliza un polinomio de la forma $n + x^{i_1} + \ldots + x^{i_s}$, donde $F(x) = \bar{n} + \bar{x}^{i_1} + \ldots + \bar{x}^{i_s}$. Sólo queda probar que el núcleo es el ideal $(2x)$, para lo que observamos lo siguiente:

- $\overline{f(x)} = 0$ si cada coeficiente de f es par.
- $f(0) = 0$ si y sólo si f no tiene coeficiente libre.

Sólo nos queda observar que un polinomio que cumple estas condiciones es divisible por $2x$.

Ejemplo 4.14. Al igual que en el ejemplo anterior, utillizamos el conjunto de representantes $\{0, 1\}$, esta vez para analizar el anillo $\mathbb{Z}[x]/(2x+1) \cong \mathbb{Z}[1/2]$. Nuevamente, cada elemento tiene una única representación de la forma $n + \bar{x}^{i_1} + \ldots + \bar{x}^{i_s}$ con $n \in \mathbb{Z}$ $i_1, \ldots, i_s$ enteros positivos diferentes. En este caso, el mismo razonamiento del ejemplo precedente nos dá una representación del tipo

$$\frac{a}{b} = n + \frac{1}{2^{i_1}} + \frac{1}{2^{i_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{i_s}}.$$

Ejemplo 4.15. Sea $C = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Tomando $f(x) = 3x+1 \in C[x]$, y utilizando que $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ es un conjunto completo de representantes de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong C/(\bar{3})$, vemos que x tiene al menos dos representaciones diferentes del tipo $x = r(x) + x^d g(x) + q(x)f(x)$, a saber:

- $x = \bar{2}(\bar{3}x + \bar{1}) - \bar{2}$, con $\Big(q(x), g(x), r(x)\Big) = (\bar{2}, \bar{0}, -\bar{2})$.
- $x = x$, donde $\Big(q(x), g(x), r(x)\Big) = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0})$.

Por cierto $\bar{3}$ es un divisor de cero en el anillo C.

Ejemplo 4.16. Sea $C = \mathbb{Z}$. Tomamos $f(x) = 3x + 1 \in C[x]$ y el conjunto de representantes $\{1, 2, 3\}$ de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, el cual no contiene al 0. En este caso, el elemento $3x^2$ tiene al menos dos representaciones diferentes, a saber:

- $3x^2 = (x-1)(3x+1)+x(2)+1$, donde$\Big(q(x), g(x), r(x)\Big) = (x-1, 2, 1)$.
- $3x^2 = -(3x+1)+x(3x+3)+1$, con $\Big(q(x), g(x), r(x)\Big) = (-1, 3x+3, 1)$.

4.3 El lemma de Gauss

Para tratar con más facilidad anillos generados por elementos no enteros, necesitaremos herramientas más especializadas. La principal es el Lema de Gauss, el que también nos permite describir los elementos primos de un dominio de factorización única (DFU).

En lo que sigue, diremos que un dominio D es un dominio de factorización única si cada elemento no nulo puede escribirse en la forma

$$d = up_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r},$$

donde u es una unidad, mientras que $p_1, \dots, p_r$ son primos no asociados, es decir $p_i \neq vp_j$ para cada par de índices (i, j) y cada unidad v. En particular, todo DIP es un DFU, pero la conversa no se cumple. Por ejemplo, el anillo de polinomios con coeficientes enteros es un DFU, como se verá mas abajo, pero no es un DIP. Específicamente, es fácil ver que el ideal $(3, x)$ no contiene al 1, por lo que es un ideal propio. No obstante, el hecho de que 3 y x son primos diferentes, y por lo tanto relativamente primos, muestra que este ideal no puede tener un generador que no sea una unidad.

En general un polinomio $f(x) \in D[x]$ se dice primitivo si ningún primo de D lo divide. Equivalentemente, $f(x)$ es primitivo si ningún primo de D divide simultaneamente a todos sus coeficientes. Nótese que los polinomios mónicos son primitivos.

Proposición 4.17. ***(Lemma de Gauss).*** *El producto de polinomios primitivos es primitivo.*

Demostración. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios primitivos y sea $p \in D$ un elemento primo. Por definición, ninguna de las imágenes $\overline{f(x)}$, ni $\overline{g(x)}$ se anula en el anillo cociente $D[x]/(p)$. Nótese que este último es isomorfo al anillo $(D/(p))[x]$ de polinomios con coeficientes en el anillo de cocientes. Como el anillo de polinomios sobre un dominio es un dominio, por la multiplicatividad del grado, se concluye que $D[x]/(p)$ es un dominio. Se concluye que la clase $\overline{f(x)g(x)} \in D[x]/(p)$ es no nula. Como p es arbitrario, concluimos que $f(x)g(x)$ es primitivo. □

Obsérvese que cualquier polinomio $f(x)$ en $D[x]$ puede escribirse en la forma $f(x) = nf_0(x)$ donde $n = c(f)$ es un elemento de D, al que llamaremos el contenido de f, y f_0 es un polinomio primitivo, al que llamaremos la parte

primitiva de f. El contenido es, de hecho, el máximo común divisor de los coeficientes de f, por lo que está definido sólo salvo unidades. En lo sucesivo, hablaremos del contenido $c(f)$, y de la parte primitiva de f, como si estuviesen bien definidos, pero debe tenerse presente la existencia de esta "unidad libre". Se sigue de lo anterior que si se escribe un polinomio en la forma $f(x) = nf_0(x) = mf_1(x)$, donde f_0 y f_1 son primitivos, entonces $m = un$ para alguna unidad u de D. El contenido de f es n o m, indistintamente.

Denotemos por $K = \text{Quot}(D)$ al cuerpo de cocientes del dominio D, es decir el cuerpo formado por todas las fracciones $\frac{a}{b}$ con a y b en el dominio D. Los conceptos de parte primitiva y contenido se pueden extender al cuerpo de cocientes K como sigue:

> Si $f(x)$ es un polinomio con coeficientes en K, podemos escribirlo en la forma $\frac{\tilde{f}(x)}{q}$, donde $\tilde{f}(x) \in D[x]$, sacando un denominador común q. Entonces, se define el contenido mediante $c(f) = \frac{c(\tilde{f})}{q}$, mientras la parte primitiva se define por $f(x)/c(f)$, o, equivalentemente, como la parte primitiva de $\tilde{f}$.

Tal como en el anillo D, el contenido y la parte primitiva en $K[x]$ están bien definidos salvo unidades, ya que cualquier identidad del tipo $\frac{\tilde{f}(x)}{q} = \frac{\tilde{f}_1(x)}{q_1}$ implica una identidad $q_1\tilde{f}(x) = q\tilde{f}_1(x)$ en $D[x]$, la que puede utilizarse para probar que las partes primitivas de $\tilde{f}(x)$ y $\tilde{f}_1(x)$ coinciden.

Proposición 4.18. ***(Lemma de Gauss, segunda versión).*** *Todo polinomio irreducible en $D[x]$ es irreducible en $K[x]$.*

Demostración. Sean $f(x)$ un polinomio irreducible en $D[x]$. Supongamos que f tiene una factorización $f(x) = g(x)h(x)$ en $K[x]$. Utilizamos las descomposiciones $h(x) = c(h)h_0(x)$ y $g(x) = c(g)g_0(x)$, escribimos

$$f(x) = c(h)c(g)h_0(x)g_0(x).$$

Como el polinomio $h_0(x)g_0(x)$ es primitivo, debe ser la parte primitiva de f, mientras que $c(h)c(g) = c(f)$ es su contenido. Se concluye que $f(x) = c(f)h_0(x)g_0(x)$, lo que es una factorización en $D[x]$. □

Proposición 4.19. *Todo polinomio $f(x) \in D[x]$ es irreducible si y sólo si satisface las dos condiciones siguientes:*

- $f(x)$ *es primitivo.*
- $f(x)$ *es irreducible como elemento de* $K[x]$*.*

Demostración. La factorización $f(x) = c(f)f_0(x)$ muestra que la primera condición es necesaria, mientras que la segunda lo es por la proposición precedente. Por otro lado, la primera condición sirve para evitar factorizaciones del tipo $f(x) = dh(x)$ donde $d \in D$ es una constante no trivial. Cualquier otra factorización es también una factorización no trivial en $K[x]$. □

Para lo que sigue es conveniente recordar que las unidades del anillo $D[x]$, cuando D es un dominio, son precisamente las constantes invertibles.

Proposición 4.20. ***(Lemma de Gauss, tercera versión).*** *Si* D *es un DFU, entonces* $D[x]$ *es un DFU.*

Demostración. Basta ver que cada elemento $f(x) \in D[x]$ es producto de primos. De hecho, en $K[x]$, tenemos una factorización

$$f(x) = up_1(x)^{\alpha_1}, \cdots, p_r(x)^{\alpha_r},$$

donde u es una constante y cada $p_i(x)$ es un polinomio primo que, cambiándo la constante de ser necesario, podemos suponer primitivo en $D[x]$. Se sigue que estos polinomios son irreducibles en $D[x]$ y su producto es la parte primitiva de f. Se sigue que u es el contenido de f, y por lo tanto está en D. Podemos, por lo tanto, escribir u como un producto de primos de D, los que siguen siendo primos en $D[x]$, como se prueba más arriba. Para terminar la demostración, basta ver que los polinomios irreducibles en $D[x]$ son primos.

Sea $g(x) \in D[x]$ un polinomio irreducible, y por lo tanto primitivo. Supongamos que $g(x)h(x) = G(x)H(x)$, donde h, G y H son polinomios en $D[x]$. Se sigue que g divide a G o H, digamos G, en $K[x]$. Digamos $G(x) = g(x)q(x)$. Basta ver que $q(x)$ tiene coeficientes en D. Tomando contenidos, obtenemos $c(G) = c(g)c(q)$. Como g es primitivo, $c(g)$ es una unidad, y $c(G) \in D$, pues G tiene coeficientes en D. Se concluye que $c(q) \in D$, por lo que q tiene coeficientes en D. El resultado sigue. □

Ejemplo 4.21. El polinomio $4x^2+1$ es primitivo e irreducible en $\mathbb{Q}[x]$, por lo que es un elemento primo de $\mathbb{Z}[x]$. Además, cada polinomio que cumple $f(i/2)=0$ en $\mathbb{Q}[x]$ es un múltiplo de $4x^2+1$. Se sigue del Lemma de Gauss que lo mismo ocurre en $\mathbb{Z}[x]$. Concluimos que

$$\mathbb{Z}[i/2] \cong \mathbb{Z}[x]/(4x^2+1).$$

Un resultado relacionado al lema de Gauss que también utilizaremos bastante en lo que sigue es el siguiente:

Proposición 4.22. ***(Criterio de irreducibilidad de Eisenstein).*** *Sea C un anillo conmutativo, $u \in C$ un elemento arbitrario, $p \in C$ un elemento primo y $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ un polinomio que satisface lo siguiente:*

1. *El cociente $\bar{f}$ módulo p es de la forma $\bar{a}_n(x-\bar{u})^n \neq \bar{0}$.*
2. *p^2 no divide a $f(u)$.*

Entonces $f(x) \in C[x]$ no puede escribirse como el producto de dos polinomios no constantes. En particular, si f es primitivo, entonces es irreducible.

Demostración. Remplazando $f(x)$ por $f(x+u)$ de ser necesario, podemos asumir que u es 0. Asumamos la existencia de una factorización no trivial $f(x)=g(x)h(x)$. Reduciendo módulo p obtenemos $\bar{f}(x)=\bar{g}(x)\bar{h}(x)$. Nótese que $\bar{f}$ es un monomio, y, sobre un dominio de integridad, un monomio no puede factorizarse en polinomios que no sean monomios. Dejamos los detalles al lector. Escribiendo $g(x)=\bar{b}x^m$ y $h(x)=\bar{c}x^s$, es claro que debe tenerse $m+s=n$. Como $m \leq \deg(g)$ y $s \leq \deg(h)$, debe tenerse igualdad en ambos casos. En particular $m,s \geq 1$. Escribiendo $g(x)=bx^m+pg_1(x)$ y $h(x)=cx^s+ph_1(x)$, se obtiene, $f(0)=p^2g_1(0)h_1(0)$, una contradicción. □

Ejemplo 4.23. El polinomio $\Phi_p(x)=1+x+\cdots+x^{p-1}=\frac{x^p-1}{x-1}$ es irreducible, ya que

$$\bar{\Phi}_p(x)=\frac{x^p-\bar{1}}{x-\bar{1}}=\frac{(x-\bar{1})^p}{x-\bar{1}}=(x-\bar{1})^{p-1},$$

mientras que $\Phi_p(1)=p$.

4.4 Cocientes de $\mathbb{Z}[x]$ y $\mathbb{Z}[\alpha]$

En esta sección introdciremos algunas técnicas que nos permitirán estudiar anillos de la forma $\mathbb{Z}[\alpha]$, donde α e un número complejo. En particular, estudiaremos algunas técnicas para estudiar cocientes de este anillo. Muchos elementos de un anillo pueden estudiarse vía cocientes. Las unidades u de un anillo C se caracterizan por la propiedad $C/(c) \cong \{0\}$. Los primos se caracterizan por la propiedad de que el cociente es un dominio. Ideales comaximales pueden caracterizarse via el Teorema Chino de los Restos. En los cálculos que siguen, utilizaremos a menudo los teoremas de isomorfía como herramienta de cálculo, en particular el segundo. Según este teorema, si tenemos dos ideales $I \subseteq J$ en un anillo conmutativo C, existe un isomorfismo natural

$$\phi : C/J \xrightarrow{\cong} (C/I)\Big/(J/I).$$

Veremos como este resultado permite calcular cocientes en los ejemplos que siguen. El truco común a todos ellos es la interpretación de los cocientes intermedios como un anillo de la forma $\mathbb{Z}[\alpha]$.

Ejemplo 4.24. El cociente $\mathbb{Z}[x]/(2,x)$ es isomorfo al cuerpo con dos elementos $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. De hecho, como $\mathbb{Z}[x]/(x) \cong \mathbb{Z}$, se tiene

$$\mathbb{Z}[x]/(2,x) \cong \Big(\mathbb{Z}[x]/(x)\Big)\Big/\Big((2,x)/(x)\Big) \cong \mathbb{Z}/(2) = \mathbb{F}_2.$$

Se sigue que $(2,x)$ es un ideal maximal del anillo $\mathbb{Z}[x]$.

Ejemplo 4.25. El cociente $\mathbb{Z}[x]/(2x+1, x+2)$ se calcula observando que $\mathbb{Z}[x]/(x+2)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$ mediante el homomorfismo de evaluación en -2.

$$\mathbb{Z}[x]/(2x+1,x+2) \cong \Big(\mathbb{Z}[x]/(x+2)\Big)\Big/\Big((2x+1,x+2)/(x+2)\Big)$$

$$\cong \mathbb{Z}/\Big(2(-2)+1,(-2)+2\Big) = \mathbb{Z}/(-3,0) = \mathbb{F}_3.$$

Concluimos que $(2x+1, x+2)$ es un ideal maximal. En este ejemplo se aprecia más claramente el paso de la identificación de un ideal con su imagen en el anillo cociente, lo que resulta crítico para cálculos de este tipo.

Nótese que si $\mathbb{Z}[\alpha] \cong \mathbb{Z}[x]/\Big(f(x)\Big)$, el método anterior nos permite, en ocasiones, calcular cocientes en anillos de la forma $\mathbb{Z}[\alpha]$. Ilustraremos esto en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.26. Calcularemos para que primos $p \in \mathbb{Z}$, el ideal principal (p) es primo en $\mathbb{Z}[i]$. Para ello observamos que $\mathbb{Z}[i]$ se identifica con el cociente $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$. Luego

$$\mathbb{Z}[i]/(p) \cong \mathbb{Z}[x]/(p, x^2+1) \cong \mathbb{F}_p[x]/(x^2+1).$$

Se concluye que (p) es primo en $\mathbb{Z}[i]$ si y sólo si (x^2+1) es primo en $\mathbb{F}_p[x]$. Veamos que este es el caso si y sólo si -1 no es un cuadrado módulo p. Para esto utilizamos el hecho de que $\mathbb{F}_p[x]$ es un dominio euclideano. En particular, todo polinomio de este anillo es primo si y sólo si es irreducible, lo que para un polinomio cuadrático es equivalente a no tener raices. Por otro lado, los resultados del Capítulo 3 nos dicen que -1 es un cuadrado módulo p si y sólo si p es congruente a 3 módulo 4. Se sigue que 3, 7 y 11 son primos en $\mathbb{Z}[i]$, mientra que 5 y 13 no lo son. Veremos en el próximo capítulo que $\mathbb{Z}[i]$ es un dominio euclideano, por lo que 5 y 13, así como cualquier otro primo de la forma $4k+1$, deben ser, de hecho, reducibles. Esto se comprueba fácilmente en casos particulares. Obsérvese que $5 = (2+i)(2-i)$ y $13 = (3+2i)(3-2i)$.

Ejemplo 4.27. Calcularemos el cociente $\mathbb{Z}[i]/(1+i)$. Primero observamos que una preimagen bajo la evaluación en i de $1+i$ es el polinomio $1+x$, por lo que al identificar $\mathbb{Z}[i]$ con $\mathbb{Z}[x]/(1+x^2)$ se tiene el isomorfismo $\mathbb{Z}[i]/(1+i) \cong \mathbb{Z}[x]/(1+x, x^2+1)$. Cocientando ahora por $(1+x)$, es decir evaluando en -1, se tiene que la imagen de x^2+1 es 2, y por lo tanto $\mathbb{Z}[x]/(1+x, x^2+1) \cong \mathbb{Z}/(2) = \mathbb{F}_2$. Se concluye que $\mathbb{Z}[i]/(1+i) \cong \mathbb{F}_2$. En particular, esto demuestra que el ideal principal $(1+i)$ es maximal en el anillo $\mathbb{Z}[i]$, y que el elemento $1+i$ es primo.

Dos ideales I y J se dicen comaximales si $I + J = C$. La importancia de este concepto radica en que el Teorema Chino de los restos se extiende a ideales comaximales cualesquiera.

Proposición 4.28. ***Teorema Chino de los restos, versión general*** *Sean J e I dos ideales comaximales en un anillo conmutativo C. Entonces se cumplen las identidades $IJ = I \cap J$ y $C/IJ \cong (C/I) \times (C/J)$.*

Demostración. Si $I + J = C$, existen elementos $a \in I$ y $b \in J$ tales que $a + b = 1$. Es claro que $IJ \subseteq I \cap J$. Para probar la contención opuesta obsevamos que $c \in I \cap J$ implica $c = c \cdot 1 = ca + cb$, y cada sumando puede interpretarse como el producto de un elemento en I con uno en J.

Para la segunda afirmación escribimos $\bar{a}$ y $\bar{b}$ para las imágenes de a y b en $R = C/IJ$. Nótese que $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$, dado que el producto está contenido en IJ. Además $\bar{a} = \bar{a} \cdot \bar{1} = \bar{a}(\bar{a} + \bar{b}) = \bar{a}^2$, por lo que $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son idempotentes complementarios del anillo R. Se sigue que $R \cong R/(\bar{a}) \times R/(\bar{b})$. Afirmamos que $(\bar{a}) = \bar{I} := I/IJ$ y $(\bar{b}) = \bar{J} := J/IJ$. De la afirmación se deduce $R/(\bar{a}) \cong (C/IJ)\Big/(I/IJ) \cong C/I$, y lo mismo se aplica al segundo factor. Por simetría, es suficiente probar la afirmación para a. Para comprobar esta afirmación, necesitamos probar que $\bar{I} \subseteq (\bar{a})$, pues la conversa es inmediata. Sea $\bar{c}$ un elemento de $\bar{I}$, digamos la imagen de cierto elemento $c \in I$. Entonces $\bar{c} = \bar{c} \cdot \bar{1} = \bar{c}(\bar{a} + \bar{b}) = \bar{c}\bar{a}$, dado que, como antes $\bar{c}\bar{b} = \bar{0}$. De aquí se sigue el resultado. □

Ejemplo 4.29. Los ideales $(2, x)$ y $(3, x)$ en $\mathbb{Z}[x]$ son comaximales. Luego

$$\mathbb{Z}[x]/(2, x) \times \mathbb{Z}[x]/(3, x) \cong \mathbb{Z}[x]/\Big((2, x) \cap (3, x)\Big) = \mathbb{Z}[x]/(6, x). \tag{4.2}$$

Nótese que $(2, x)(3, x) = (6, 2x, 3x, x^2) = (6, x)$, ya que $x = 3x - 2x$. Como $\mathbb{Z}[x]/(n, x) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, el isomorfismo en (4.2) es el ya conocido isomorfismo $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Ejemplo 4.30. Los ideales (2) y (x) en $\mathbb{Z}[x]$ no son comaximales, aún cuando 2 y x no tienen factores comunes, de hecho son ambos primos. En particular, esto prueba que $\mathbb{Z}[x]$ no es un DIP. De hecho $\mathbb{Z}[x]/(2, x) \cong \mathbb{F}_2$ como se vió en un ejemplo precedente. La imagen del homomorfismo canónico

$$\phi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]/(2) \times \mathbb{Z}[x]/(x) \cong \mathbb{F}_2[x] \times \mathbb{Z},$$

no contiene al elemento $\Big(1 + (2), 2 + (x)\Big)$, pues si así fuese tendríamos

$$\Big(g + (2), g + (x)\Big) = \Big(1 + (2), 2 + (x)\Big),$$

de donde $g = 1 + 2r$ y $g = 2 + xs$, es decir $1 = 2r - xs$, por lo que evaluando en 0 se tendría la contradicción $1 = 2r(0)$.

Ejemplo 4.31. En el siguiente ejemplo calcularemos un cociente en el anillo $\mathbb{Z}[1/2] \cong \mathbb{Z}[x]/(2x - 1)$. De hecho, calcularemos el cociente $\mathbb{Z}[1/2]/(5)$. Para esto reescribimos como sigue:

$$\mathbb{Z}[1/2]/(5) \cong \mathbb{Z}[x]/(5, 2x - 1) \cong \mathbb{F}_5[x]/(2x - 1) \cong \mathbb{F}_5,$$

ya que el elemento 2 es invertible en $\mathbb{F}_5$.

Este ejemplo nos ilustra el hecho de que la operación de agregar inversos (o localizar) conmuta con la operación de calcular un cociente. Este es un resultado muy importante en la teoría de anillos conmutativos y justifica el hecho de que los inversos módulo n se comportan de manera muy similar a los inversos racionales, como se mencionó en el Capítulo 2. De hecho, en el ejemplo anterior, $1/2 \equiv 3 \pmod 5$, pues

$$\frac{1}{2} - 3 = \frac{-5}{2}$$

y por esta razón el inverso de 2 módulo 5 es 3, pero esta última relación es válida ya en $\mathbb{Z}$. El siguiente ejemplo nos muestra como las propiedades de las localizaciones simplifican el cálculo de cocientes:

Ejemplo 4.32. Sea ρ una raiz del polinomio ciclotómico

$$\Phi_5(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{x^5 - 1}{x - 1}.$$

No es dificil comprobar que este polinomio es irreducible utilizando el criterio de Einsenstein. Vamos a verificar si el elemento $\rho^2 - 2$ es o no un primo. Para ello observamos que

$$\mathbb{Z}[\rho]/(\rho^2 - 2) \cong \mathbb{Z}[x]/\Big(x^2 - 2, \Phi_5(x)\Big) \cong \mathbb{Z}[\sqrt{2}]/\Big(\Phi_5(\sqrt{2})\Big).$$

Un cálculo nos proporciona $\Phi_5(\sqrt{2}) = 7 + 3\sqrt{2}$. Se sigue que

$$\mathbb{Z}[\rho]/(\rho^2 - 2) \cong \mathbb{Z}[\sqrt{2}]/(7 + 3\sqrt{2}) \cong$$

$$\mathbb{Z}[x]/(x^2 - 2, 7 + 3x) \cong \mathbb{Z}[-7/3]/\left(\frac{31}{9}, 0\right),$$

donde la ultima identidad se obtiene evaluando en $-7/3$, lo que nos dá el isomorfismo $\mathbb{Z}[x]/(7 + 3x) \cong \mathbb{Z}[-7/3] = \mathbb{Z}[1/3]$. Concluimos que el cociente buscado se obtiene agregando un inverso de 3 a $\mathbb{F}_{31} = \mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$. Esto último no afecta el cociente, pues 3 ya es invertible en ese cuerpo. Concluimos que $\mathbb{Z}[\rho]/(\rho^2 - 2) \cong \mathbb{F}_{31}$ y por lo tanto $\rho^2 - 2$ es, efectivamente, un primo en el anillo $\mathbb{Z}[\rho]$.

No es siempre el caso que la localización tenga un efecto nulo en el cociente. Por ejemplo si agregamos un inverso de 3 al anillo $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, teremos

el cociente $\mathbb{Z}[1/3]/6\mathbb{Z}[1/3]$. Como 3 es invertible en este anillo, el cociente precedente coincide con $\mathbb{Z}[1/3]/2\mathbb{Z}[1/3]$, que es isomorfo al cuerpo $\mathbb{F}_2$. Concluimos que parte de la estructura del anillo cociente desaparece durante la localización. Esto sucede en cualquier anillo conmutativo cuando se agregan inversos de elementos que son divisores de 0.

Ejemplo 4.33. En este ejemplo mostramos que existen números algebraicos α para los cuales el anillo $\mathbb{Z}[\alpha]$ no es un dominio factorial, es decir no todo elemento de $\mathbb{Z}[\alpha]$ puede escribirse como un producto de primos. De hecho, 3 no es primo en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, puesto que

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]/(3) \cong \mathbb{Z}[x]/(3, x^2+5) \cong \mathbb{F}_3[x]/(x^2+5)$$

$$= \mathbb{F}_3[x]\Big/\Big((x+1)(x+2)\Big) \cong \mathbb{F}_3[x]/(x+1) \times \mathbb{F}_3[x]/(x+2) \cong \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3.$$

Sin embargo 3 es irreducible en este anillo, dado que al tomar normas en la ecuación

$$(x+y\sqrt{-5})(w+z\sqrt{-5}) = 3$$

se obtiene

$$(x^2+5y^2)(w^2+5z^2) = 9.$$

Como $r^2+5s^2 = 3$ no tiene soluciones enteras, los dos factores de la izquierda deben ser 1 y 9. Si $x^2+5y^2 = (x+y\sqrt{-5})(x-y\sqrt{-5}) = 1$, entonces $x+y\sqrt{-5}$ es una unidad.

Si se quieren encontrar ideales maximales J e I cuya intersección, o producto, sea el ideal (3), podemos considerar los núcleos de los homomorfismos que se obtienen proyectando el epimorfismo $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \twoheadrightarrow \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$ en cada uno de sus factores. Estos núcleos están generados por 3 y las imágenes de cada uno de los polinomios $x+1$ y $x+2$, es decir $I = (3, \sqrt{-5}+1)$ y $J = (3, \sqrt{-5}+2)$. Dejamos como ejercicio para el lector comprobar que estos ideales son realmente maximales, y que su producto es el ideal generado por 3.

4.5 Ejercicios

1. Calcule el inverso en $GL_2(\mathbb{Z}/128\mathbb{Z})$ de

$$\begin{pmatrix} 9 & 96 \\ 48 & 97 \end{pmatrix}.$$

2. Probar que en el anillo $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}[x]$, el polinomio $1+3x+9x^2$ es invertible y calcule su inverso.

3. Encuentre el cociente y el resto de dividir x^7+x^2+x por x^3+x+1.

4. Sea α una raiz del polinomio x^5+x+1. Utilizar el algoritmo de la división para encontrar un polinomio de grado no mayor a 4 tal que $f(\alpha)=\alpha^6+\alpha^5+\alpha$.

5. Encuentre un polinomio g de grado no mayor a 2 y un polinomio h cuyos coeficientes no nulos sean todos unos, tal que

$$(23x^6+17x^3+x+4)-g(x)+x^3h(x)$$

sea divisible por $2x^3+4x+3$.

6. Sea $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ un polinomio con coeficientes enteros. Probar que si

$$\frac{\mathbb{Z}[x]}{(f)}=\mathbb{Z}\oplus\bar{x}\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\overline{x^{n-1}}\mathbb{Z},$$

entonces f es un polinomio mónico.

7. Probar que si a y b son relativamente primos, entonces $\mathbb{Z}[x]/(ax+b)\cong\mathbb{Z}[1/a]$.

8. Probar que $\mathbb{Z}[x]/(2x)$ es isomorfo al subanillo de $\mathbb{Z}\times\mathbb{F}_2[x]$ formado por aquellos pares $\Big(n,f(x)\Big)$ que satisfacen $n\equiv f(0)\pmod 2$.

9. Probar que un polinomio $f(x)$ con coeficientes enteros satisface $f(1/2)=0$ si y sólo si es divisible por $2x+1$.

10. Sea

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0.$$

Probar que cada clase en $\mathbb{Z}[x]/(f)$ tiene un único representante de la forma $r(x)+x^ng(x)$ donde r tiene grado a lo más $n-1$ y g tiene coeficientes en $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$.

11. Determine cuales de los siguientes pares de ideales en $\mathbb{Z}[x]$ son comaximales:

(a) $(3x)$ y (2).

(b) $(3x-1)$ y $(3x-2)$.

(c) $(3x-1)$ y $(9x^2+1)$.

12. Determine cuales de los siguientes ideales del anillo $\mathbb{Z}[x]$ coinciden con el anillo completo:

(a) $(x, 2)$.

(b) $(x^2, x+1)$.

(c) (x^2-1, x^2+x+1).

13. Determine cuantos elementos tiene el anillo cociente $\mathbb{Z}[x]/I$ en cada uno de los siguientes casos:

(a) $I = (x, 2)$.

(b) $I = (x^3, x-3)$.

(c) $I = (x^2-4, x^2+x+1)$.

14. Determine la estructura de los siguientes anillos:

(a) $\mathbb{Z}[i]/(i-3)$.

(b) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]/(\sqrt{2}-3)$.

(c) $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]/(3)$.

(d) $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]/(3-\sqrt[3]{2})$.

(e) $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]/(3-\sqrt[3]{4})$.

(f) $\mathbb{Z}[\rho]/(\rho^2-2)$, donde $\rho = e^{2\pi i/5}$.

(g) $\mathbb{Z}[i]/(3)$.

15. Determine que primos enteros son primos en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.

16. Demuestre que existen infinitos primos enteros que son primos en $\mathbb{Z}[\sqrt{D}]$ para cada D entero.

17. Determine si 7, 13, y 19 son o no primos en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$.

18. Probar que ningún primo entero de la forma $3k+2$ puede ser primo en el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$.

19. Sea C un anillo conmutativo arbitrario. Sea $\wp$ un ideal arbitrario de C. Sea f un polinomio con coeficientes en C y sea

$$D = \frac{C[x]}{(f)}$$

el anillo que se obtiene *al agregarle a C una raiz de f*. Probar que el anillo obtenido al cocientar D por el ideal que genera $\wp$ es isomorfo al anillo obtenido al agregarle a $C/\wp$ una raiz de la reducción módulo $\wp$ de f.

20. Encuentre dos ideales primos I, J en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ tales que $(7) = I \cap J = IJ$. Justifique.

21. Probar que los ideales $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ y $(x^{11} - 6)$ no son comaximales.

22. Encuentre dos enteros n y m tales que

$$\mathbb{Z}[\sqrt[4]{11}]/(\sqrt{11} - 2) \cong \mathbb{Z}/(n) \times \mathbb{Z}/(m).$$

23. Determine si 93 es o no un primo en el anillo $\mathbb{Z}(\frac{\sqrt{11}}{3})$. Justifique.

24. Probar que $x^2 - m$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ para todo m que no es un cuadrado perfecto.

25. Probar que $x^n - p$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ para todo entero n y todo primo p.

26. Probar que $x^4 + x + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ (sugerencia: probar módulo 2).

Chapter 5

Anillos de enteros

En los capítulos precedentes encontramos algunos anillos de la forma $\mathbb{Z}[\alpha]$ donde α satisfacía una única ecuación polinómica de la forma $f(\alpha) = 0$. Vimos que tal anillo puede identificarse con el cociente $\mathbb{Z}[x]/(f)$. Si el polinomio f es mónico, la estructura de este anillo es má sencilla, de hecho se tiene

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\alpha \oplus \mathbb{Z}\alpha^2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha^n.$$

Más generalmente, si masumimo sólamente que se satisface la identidad $f(\alpha) = 0$, el anillo $\mathbb{Z}[\alpha]$ es un cociente del anillo $\mathbb{Z}[x]/(f)$, por lo que al menos se tiene la relación

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\alpha^2 + \cdots + \mathbb{Z}\alpha^n.$$

Elementos de este tipo reciben el nombre de enteros algebraicos. En este capítulo estudiaremos con mas generalidad el concepto de elemento entero sobre un anillo y el concepto de extensión entera. Este puede verse como una versión para anillos del concepto de extensión algebraica.

5.1 Elementos enteros sobre un anillo

Sean $A \subseteq B$ anillos conmutativos. Un elemento b de B se dice entero sobre A si b es raiz de un polinomio mónico con ceficientes en A. Si $B \subseteq \mathbb{C}$, un elemento de B que es entero sobre $\mathbb{Z}$ se dice un entero algebraico.

Proposición 5.1. *Sean $A \subseteq B$ anillos conmutativos, y sea b un elemento de B. Si b satisface una ecuación del tipo $f(b) = 0$, donde $f(x) \in A[x]$ es un*

polinomio mónico de grado n, entonces $\{1, b, b^2, \ldots, b^{n-1}\}$ genera $A[b]$ como A-módulo.

Demostración Si $f(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$, entonces $f(b) = 0$ implica $b^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i b^i$. Si M es el A-módulo generado por $\{1, b, b^2, \ldots, b^{n-1}\}$, entonces b^n pertenece a M. Multiplicando la identidad precedente por b^k se tiene $b^{n+k} = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i b^{i+k}$, lo que permite probar por inducción que todas las potencias de b están en dicho módulo. Tenemos así las contenciones $M \subseteq A[b] \subseteq M$ y por lo tanto la igualdad. □

Proposición 5.2. *Sean $A \subseteq B$ anillos conmutativos, y sea b un elemento de B. Las suiguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *b es entero sobre A.*
2. *$A[b]$ es un A-módulo finitamente generado.*
3. *Existe un A-módulo finitamente generado $N \subseteq B$ que contiene a A y tal que $bN \subseteq N$.*

Demostración El resultado previo muestra que (1) implica (2). Es trivial que (2) implica (3). Finalmente, supongamos que se cumple (3). Sean $v_1, \ldots, v_n$ generadores de N como A-módulo. Se sigue que para cada $i = 1, \ldots, n$ se tiene $bv_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j$. En particular se tiene la identidad matricial $(bI - M)V = 0$ donde I es la matriz identidad, M es la matriz $(a_{i,j})_{i,j}$ y V es el vector columna

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Multiplicando por la adjunta clásica $(bI - M)^*$ se tiene $\det(bI - M)V = 0$. En particular, $\det(bI - M)$ anula a cualquier combinación lineal de los v_i's. En particular a todo elemento de N. Como $1 \in A \subseteq N$, se tiene que $\det(bI - M) = 0$ y $f(x) = \det(xI - M)$ es un polinomio mónico que anula a b. □

Si $A \subseteq B$ diremos que B es entero sobre A si cada elemento de B es entero sobre A. Se sigue del resultado anterior que si B es finitamente generado como

A-módulo, entonces es entero sobre A. En particular, si b es entero sobre A entonces $A[b]$ es entero sobre A. Mas generalmente, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 5.3. *Sea $B = A[b_1, \ldots, b_m]$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *B es entero sobre A.*
2. *Cada b_i es entero sobre A.*
3. *B es finitamente generado como A módulo.*

Demostración Es claro que (1) implica (2), y (3) implica (1) por lo dicho arriba. Probaremos que (2) implica (3). Asumamos que cada b_i es entero sobre A. En particular, existe algún polinomio mónico f_i que satisface $f_i(b_i) = 0$. Se sigue que existe un entero positivo N tal que para todo $n > N$ y para cada $i = 1, \ldots, m$, tenemos una identidad de la forma $b_i^n = \sum_{j=0}^{N} a_{i,j}(n) b_i^j$, con $a_{i,j}(n) \in A$. De hecho basta tomar $N \geq \deg(f_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Multiplicando estas expresiones se tiene que cada producto de la forma $b_1^{n_1} \ldots b_m^{n_m}$ es una combinación lineal, con coeficientes en A, de los productos $b_1^{k_1} \ldots b_m^{k_m}$ con $0 \leq k_i \leq N$, por lo que B es finitamente generado como A-módulo. □

Corolario 5.3.1. *Si b_1 y b_2 son enteros sobre A, también lo son $b_1 - b_2$, $b_1 + b_2$, y $b_1 b_2$.*

Demostración Todos ellos son elementos de $A[b_1, b_2]$. □

Corolario 5.3.2. *El conjunto de los elementos de B que son enteros sobre A es un subanillo B^{ent} de B.*

El anillo B^{ent} recibe el nombre de clausura entera de A en B. Si $A = B^{\text{ent}}$ se dice que A es integralmente cerrado en B. Si A es un dominio de integridad se dice que es integralmente cerrado (o normal) si es integralmente cerrado en su cuerpo de cocientes.

Ejemplo 5.4. Sea $A = K[x^2, x^3] \subseteq K[x]$, donde x es trascendente sobre el cuerpo K. Como x es raiz de la ecuación $T^2 - (x^2) = 0$, es entero sobre A. Por otro lado $x = \frac{x^3}{x^2}$, de donde x está en el cuerpo de cocientes de A, por lo que A no es normal.

Ejemplo 5.5. Sea $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$. Como $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ es raiz de la unidad, es entero sobre $\mathbb{Z}$, y por lo tanto sobre A. Además ω está en el cuerpo de cocientes de A, pero no en A, por lo que A no es normal.

Proposición 5.6. *Sean $A \subseteq B \subseteq C$ anillos conmutativos. Sea c un elemento de C. Si B es entero sobre A y c es entero sobre B, entonces c es entero sobre A.*

Demostración Como c es entero sobre B, satisface una ecuación $c^n = \sum_{k=0}^{n-1} b_i c^i$. Sea $B' = B[b_0, \ldots, b_{n-1}]$. Se sigue que c es entero sobre B'. En particular cada elemento de $B'[c]$ es de la forma $\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i c^i$ con $\beta_i \in B'$. Como B' es finitamente generado como A-módulo, tambien lo es

$$B'[c] = B' + cB' + c^2B' + \ldots + c^{n-1}B'.$$

El resultado sigue. □

Corolario 5.6.1. *Sean $A \subseteq B$ anillos conmutativos. El subanillo B^{ent} de B es integralmente cerrado en B.*

Corolario 5.6.2. *Sea A un dominio de integridad y B su cuerpo de cocientes. El subanillo $B^{\text{ent}} \subseteq B$ es normal.*

Proposición 5.7. *Todo DFU es normal.*

Demostración Sea D un DFU y sea $\frac{m}{n}$ un elemento de su cuerpo de cocientes que es entero sobre D. Podemos suponer que n y m son relativamente primos. Si n es una unidad, no hay nada que demostrar. De otro modo, sea p un primo que divide a n, y por lo tanto no a m. Si tenemos una ecuación del tipo

$$\left(\frac{m}{n}\right)^k = \sum_{i=0}^{k-1} s_i \left(\frac{m}{n}\right)^i,$$

donde cada coeficiente s_i esté en el anillo D, podemos multiplicar esta identidad por n^k y obtener $m^k = \sum_{i=0}^{k-1} s_i m^i n^{k-i}$. En la última identidad, el primo p divide a cada término de la derecha, pero no divide al lado izquierdo. La contradicción termina la demostración. □

Ejemplo 5.8. $\mathbb{Z}$ y $K[x_1, \ldots, x_n]$ son normales.

Ejemplo 5.9. Para toda extensión algebraica $L/\mathbb{Q}$ el anillo $\mathcal{O}_L$, formado por todos los enteros algebraicos contenidos en L, es un dominio normal, dado que su cuerpo de cocientes está contenido en L y $\mathcal{O}_L$ es su propia clausura entera allí. Veremos en la próxima sección que los anillos de enteros no son siempre DFUs. En el próximo capítulo se demuestra que el cuerpo de cocientes de $\mathcal{O}_L$ coincide con L.

Los anillos de la forma $\mathcal{O}_L$, donde $L/\mathbb{Q}$ es una extensión finita, jugarán un papel central en todo lo que sigue. Estos anillos se llamán anillos completos de enteros. Cualquier anillo B con $\mathbb{Z} \subseteq B \subseteq \mathcal{O}_L$ recibe el nombre de anillo de enteros.

5.2 Enteros en cuerpos cuadráticos

En esta sección, calcularemos el anillo de enteros en un caso básico, aquel donde $L/\mathbb{Q}$ es una extensión cuadrática.

Proposición 5.10. *Sea $L = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]/\mathbb{Q}$ una extensión cuadrática, donde d es un entero libre de cuadrados. Entonces*

$$\mathcal{O}_L = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{d}] & \text{if} \quad d \equiv 2, 3 \pmod 4, \\ \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right] & \text{if} \quad d \equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$$

Demostración Es claro que $\sqrt{d}$ es entero, por lo que $\mathbb{Z}(\sqrt{d}) \subseteq \mathcal{O}_L$. Sea $\alpha = a + b\sqrt{d}$ con a y b racionales . Si α es un entero algebraico, también lo es su conjugado $a - b\sqrt{d}$. En particular $2a$ y $2b\sqrt{d}$ son enteros. Así que también lo es $(2b\sqrt{d})^2 = (2b)^2 d$, por lo que, siendo d libre de cuadrados, $2b$ debe ser un entero. Se sigue que podemos escoger enteros n y m tales que $a - n$ y $b - m$ sean 0 o $\frac{1}{2}$. Se sigue que $\alpha - (n + m\sqrt{d}) \in \{0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{d}}{2}, \frac{1+\sqrt{d}}{2}\}$, por lo que basta con verificar cuales de estos elementos son enteros:

- Claramente $\frac{1}{2}$ no es entero.
- Tampoco lo es $\frac{\sqrt{d}}{2}$ ya que su cuadrado es $\frac{d}{4}$.
- El elemento $\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ tiene el polinomio irreducible $x^2 - x + \frac{1-d}{4}$, por lo que es un entero precisamente cuando $d \equiv 1$ módulo 4.

El resultado es ahora inmediato, si observamos que $\sqrt{d} = 2\left(\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right) - 1 \in \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right]$. □

Ejemplo 5.11. If $L = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, then $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Ejemplo 5.12. If $L = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$, then $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

Ejemplo 5.13. If $L = \mathbb{Q}[i]$ con $i = \sqrt{-1}$, then $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}[i]$. Este recibe, usualmente, el nombre de Anillo de Enteros de Gauss.

Ejemplo 5.14. If $L = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, then $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. El generador $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es raiz de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$ y juega un papel fundamental en el análisis de los números de Fibonacci.

Ejemplo 5.15. If $L = \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$, then $\mathcal{O}_L = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right]$ es llamado el anillo de enteros de Eisenstein. Nótese que este anillo puede escribirse también $\mathbb{Z}[\omega]$, donde $\omega = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$ es una raiz cúbica primitiva de la unidad.

Ejemplo 5.16. El anillo $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ no es un DFU, y es normal, dado que $A = \mathcal{O}_L$ donde $L = \mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$. Concluímos que existen dominios normales que no son DFUs.

El siguiente resultado resulta bastante útil en el estudio de algunos de estos cuerpos cuadráticos, por lo menos en el caso de las raices negativas, a las que nos referiremos como extensiones cuadráticas complejas.

Proposición 5.17. *Sea Γ el paralelógramo, en $\mathbb{C}$, de vértices $\{0, 1, \eta, \eta+1\}$, donde η es un entero generando una extensión cuadrática compleja. Asuma que se cumple la condición siguiente:*

> *"Todo punto al interior de Γ está a una distancia menor a 1 del conjunto de vértices de Γ."*

Entonces $\mathbb{Z}[\eta]$ es un DE.

Demostración. Para probar que un anillo es euclideano es suficiente exhibir un algoritmo de Euclides que, en este caso, es el valor absoluto complejo $g(a + bi) = ||a + bi|| = a^2 + b^2$. La condición de que η es un entero y genera una extensión cuadrática, nos dice que todo elemento $s \in \mathbb{Z}(\eta)$ se escribe de manera única como $s = a + b\eta$ con a y b enteros.

Sean $n, m \in \mathbb{Z}(\eta)$. El conjunto (m) de los múltiplos sm de m está generado, como $\mathbb{Z}$-módulo, por la observación anterior, por los elementos m y $m\eta$. Este conjunto puede visualizarse como los vértice de una retícla infinita como la que se muestra en la Figura 5.1. Cada uno de los paralelógramos determi-

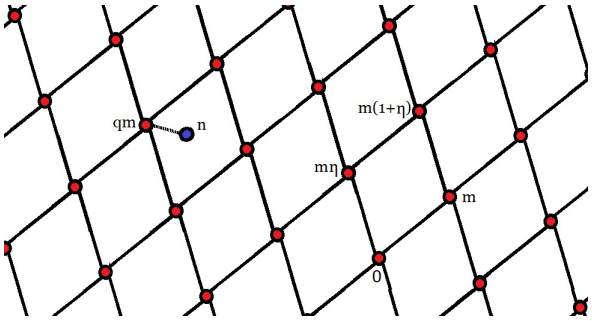


Figure 5.1: Un ideal principal como una retícula infinita.

nados por esta retícula es una imagen homotética del paralelógramo Γ. Girado en un ángulo α y con un factor de re-escalamiento r, donde $m = re^{\alpha i}$. Se sigue que n se encuentra al interior de uno de estos paralelógramos, por lo que existe un punto reticular qm que satisface la desigualdad $||n - qm|| < ||m||$. Definimos, por lo tanto $r = n - qm$ y se tiene $n = qm + r$ con $||r|| < ||m||$. $\square$

En las siguientes secciones nos concentraremos en los ejemplos más icónicos de anillos de enteros cuadráticos complejos. Ambos tienen numerosas aplicaciones a otras areas de la matemática. Intentaremos ilustrar algunas en este capítulo. Dado que ambos son DEs, como se deduce de sencillos cálculos geométricos y de una aplicación directa de la proposición precedente.

5.3 Enteros de Gauss

El anillo $\mathbb{Z}[i]$, o anillo de enteros de Gauss, es el anillo de enteros algebraicos del cuerpo $\mathbb{Q}[i]$. Sus elementos son los complejos de la forma $a + bi$ con a y b enteros. Dado que la norma de este complejo está dado por $|a+bi|^2 = a^2+b^2$, este anillo es particularmente útil para resolver ecuaciones diofánticas del tipo $x^2 + y^2 = a$ o $x^2 + y^2 = z^r$. Daremos algunos ejemplos en esta sección.

Proposición 5.18. *$\mathbb{Z}[i]$ es un DE.*

Demostración. Utilizaremos la proposición 5.17 con $\eta = i$. En este caso el paralelógramo Γ es un cuadrado de lado 1, cómo el que muestra la Figura 5.2. Basta ver que todo punto interior del cuadrado se encuentra a una distancia menor a uno de alguno de los vértices. De hecho, el punto interior que se encuentra más lejos de los vértices es el centro del cuadrado, y este está a distancia $\frac{\sqrt{2}}{2}$ de cada vértice. Hay varias maneras de probar esto.

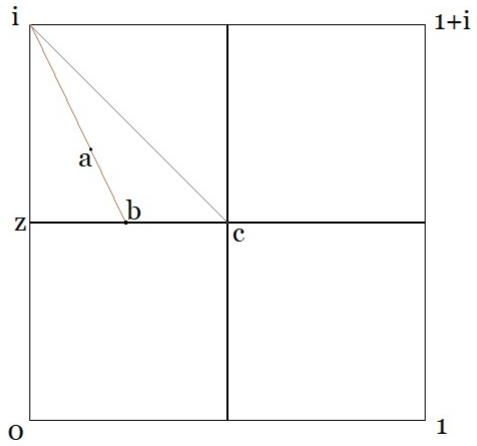


Figure 5.2: El cuadrado fundamental del anillo de Gauss

Una de ellas es dividir el cuadrado en 8 triángulos congruentes al triángulo $T_{i,z,c}$ de vértices i, z, c de la figura. Un punto interior cualquiera a de este último triángulo está mas cerca del vértice i que el punto b en el que la recta $L_{i,a} = \{it + (1-t)a | t \in \mathbb{R}\}$ corta a la recta $L_{z,c}$, definida analogamente. Del mismo modo, es claro que $|i - b|$ es mayor que $|i - c|$, dado que el triángulo $T_{i,b,c}$ es obtusángulo en b. El argumento para cualquiera de los otros ocho subtriángulos es similar. □

Se sigue del resultado anterior que cada entero de Gauss es producto de

primos de manéra única. En particular, los enteros en $\mathbb{Z}$, que en lo sucesivo serán denominados enteros racionales, son producto de primos de $\mathbb{Z}[i]$ de manera única. Como cada entero racional puede escribirse como producto de primos racionales de manera única, para hacer esta descomposición explícita, es suficiente con escribir cada primo racional como producto de enteros Gausianos. Por ejemplo, si queremos escribir a 30 como un producto de primos en $\mathbb{Z}[i]$, basta con hacerlo para 2, 3 y 5. De hecho $2 = (-i)(1+i)^2$, $5 = (1+2i)(1-2i)$ mientras que 3 es primo. Para ver directamente que cada uno de los elementos mencionados es primo se pueden realizar los cálculos siguientes:

- El entero 3 es un primo ya que

$$\mathbb{Z}[i]/(3) \cong \mathbb{Z}[x]/(3, x^2+1) \cong \mathbb{F}_3[x]/(x^2+1),$$

  y el polinomio x^2+1 no tiene raices en $\mathbb{F}_3$.

- $1+i$ es primo, ya que

$$\mathbb{Z}[i]/(1+i) = \mathbb{Z}[i]/(2, 1+i) \cong \mathbb{Z}[x]/(2, 1+x, x^2+1)$$

$$\cong \mathbb{F}_2[x]/(1+x, x^2+1) = \mathbb{F}_2[x]/(1+x) \cong \mathbb{F}_2.$$

- $1+2i$ es primo, ya que

$$\mathbb{Z}[i]/(1+2i) = \mathbb{Z}[i]/(5, 1+2i) \cong \mathbb{Z}[x]/(5, 1+2x, x^2+1)$$

$$\cong \mathbb{F}_5[x]/(1+2x, x^2+1) = \mathbb{F}_5[x]/(1+2x) \cong \mathbb{F}_5.$$

- $1-2i$ es primo, ya que

$$\mathbb{Z}[i]/(1-2i) = \mathbb{Z}[i]/(5, 1-2i) \cong \mathbb{Z}[x]/(5, 1-2x, x^2+1)$$

$$\cong \mathbb{F}_5[x]/(1-2x, x^2+1) = \mathbb{F}_5[x]/(1-2x) \cong \mathbb{F}_5.$$

Sin embargo, el hecho de que $\mathbb{Z}$ es un DE nos entrega una alternativa más simple. Si $c = ab$ donde a, b, y c son enteros gausianos, entonces sus valores absolutos satisfacen la relación $|c| = |a| \cdot |b|$. Además, los cuadrados de los valores absolutos de los enteros de Gauss son siempre enteros. Se sigue que, si c es un entero de Gauss para el cual $|c|^2$ es un primo, entonces c es irreducible. Como $\mathbb{Z}[i]$ es un DE, cada elemento irreducible allí es un primo. Concluímos

así que $1+i$, $1+2i$ y $1-2i$ son primos, pues $|1+i|^2 = 2$ y $|1+2i|^2 = |1.2i|^2 = 5$. Por otro lado, si algún primo p no es suma de cuadrados, no puede escribirse $p = ab$, con $a, b \in \mathbb{Z}[i]$ y ninguno de ellos unidad. Esto es porque $|p|^2 = p^2$, de modo que, al no haber enteros de Gauss de valor absoluto $\sqrt{p}$, algunos de estos enteros, a o b, debe tener largo uno, por lo que debe estar en el conjunto $\{1, -1, i, -i\} = \mathbb{Z}[i]^*$. Se sigue que p es irreducible, y por lo tanto primo en $\mathbb{Z}[i]$. Esto se aplica, por ejemplo a $p = 3$. Concluímos que la factorización en primos de 30 es

$$30 = (-i) \cdot 3 \cdot (1+i)^2 \cdot (1+2i) \cdot (1-2i).$$

Proposición 5.19. *Un primo racional es un primo en $\mathbb{Z}[i]$ si y sólo si es de la forma $4k-1$. Todo primo en $\mathbb{Z}[i]$ es divisor de algún primo racional.*

Demostración. La primera afirmación se demuestra mediante un cálculo directo del cociente. De hecho se tiene

$$\mathbb{Z}[i]/(p) \cong \mathbb{Z}[x]/(p, x^2+1) \cong \mathbb{F}_p[x]/(x^2+1),$$

y el polinomio x^2+1 tiene raices en $\mathbb{F}_p$ si y sólo si -1 es un cuadrado módulo p. Si p es impar, esto es equivalente a que $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$, como se vió en el capítulo 3. El primo $p = 2$ ya se factorizó arriba. Para la segunda afirmación, basta ver que todo primo π del anillo de Gauss divide al entero $|\pi|^2 = \pi\bar{\pi}$. Como este entero se escribe como un producto de primos racionales, el entero de Gauss π debe divir a alguno de estos por definición de primo. □

Corolario 5.19.1. *Todo primo racional de la forma $4k+1$ es suma de dos cuadrados de números enteros. Además esta expresión es única salvo el orden y el signo.*

Demostración. Se sigue del resultado anterior que todo primo p de la forma $p = 4k+1$ debe factorizarse en $\mathbb{Z}[i]$ en forma no trivial. Además, como $|p|^2 = p^2$, p sólo puede factorizarse como el producto $p = \pi_1\pi_2$ de dos primos de valor absoluto $\sqrt{p}$. Las propiedades de la notación polar compleja muestran que π_1 y π_2 deben ser complejos conjugados. Digamos $\pi_1 = \pi$ y $\pi_2 = \bar{\pi}$. Si escribimos $\pi = x + yi$, se tiene $p = x^2 + y^2$. Además, por la unicidad de la

descomposición en primos, las únicas alternativas son intercambiar π con su conjugado, por un elemento de la forma $u\pi$, donde $u \in \{1, -1, i, -i\}$ es una unidad, o una combinación de ambos. Esta elección dá todas las posibles permutaciones de x e y y de sus inversos, como lo demuestra una tediosa comprobación que se deja al lector. □

Corolario 5.19.2. *Todo primo del anillo de Gauss es, un primo racional de la forma $4k-1$, un primo de la forma $\pi = x+yi$, donde x^2+y^2 es un primo racional de la forma $4k+1$ o el primo $1+i$.* □

El siguiente resultado, el que es inmediato por las propiedades de la conjugación compleja, será útil en todo lo que sigue:

Lema 5.20. *Si z, u y w son enteros de Gauss que satisfacen $z = uw$, entonces $\bar{z} = \bar{u}\bar{w}$. En particular, si w divide a z, entonces $\bar{w}$ divide a $\bar{z}$.* □

Lema 5.21. *Si $\pi = x + yi$, donde $x^2 + y^2$ es un primo racional de la forma $4k + 1$, entonces π y $\bar{\pi}$ son primos no asociados.*

Demostración. Las únicas unidades de $\mathbb{Z}[i]$ son los elementos del conjunto $\{1, -1, i, -i\}$. Se sigue que los únicos asociados de $\pi = x + yi$ son los elementos de

$$\{\pi, -\pi, i\pi, -i\pi\} = \{x + yi, -x - yi, y - xi, -y + xi\}.$$

Ninguno de estos coincide con $\bar{\pi}$, salvo que $xy = 0$ o que $x = \pm y$. La primera no es posible si $x^2 + y^2$ es primo. La segunda sólo es posible si $x = \pm 1$ y $x^2 + y^2 = 2$. □

A partir de aquí, usaremos la notación $v_p(n)$ para lña mayor potencia de un primo p que divide a un entero n. Es decir $t = v_p(n)$ significa que p^t divide a n y que p^{t+1} no divide a n.

Proposición 5.22. *El máximo común divisor entre los enteros de Gauss $\rho = a + bi$ y $\bar{\rho}$ es el máximo común divisor d de a y b, salvo cuando $v_2(a) = v_2(b)$, en cuyo caso es $d(1 + i)$.*

Demostración. Es claro que d divide a ρ y a $\bar{\rho}$. Remplazando ρ por $\frac{\rho}{d}$, podemos suponer que $d = 1$, es decir que a y b son relativamente primos. En particular no pueden ser ambos pares. Supongamos que π es un primo que divide a ambos, π no puede ser un primo racional si $d = 1$, por lo que debe ser un primo de la forma $\pi = x + yi$, con $x^2 + y^2$ primo de la forma $4k + 1$, o bien $\pi = 1 + i$. En es primer caso, $\bar{\pi} = x - yi$ divide también a ρ y $\bar{\rho}$. Como π y $\bar{\pi}$ no son asociados, se sige que el primo racional $|\pi|^2 = \pi\bar{\pi}$ divide a ρ, y por lo tanto también a a y b, contradiciendo la hipótesis de que $d = 1$. El entero de Gauss $(1 + i)^2 = 2i$ tampoco puede dividir a ρ y $\bar{\rho}$ si $d = 1$. Se concluye que el único posible divisor común es $1+i$. Si $1+i$ divide a ρ, también divide a $\bar{\rho}$, dado que $\overline{1 + i} = 1 - i = (-i)(1 + i)$. Basta, por lo tanto, determinar cuando $1 + i$ divide a ρ. Esto ocurre si

$$\frac{a + bi}{1 + i} = \frac{b + a}{2} + \frac{b - a}{2}i$$

es un entero. Esto es equivalente a que a y b sean impares, dado que no son ambos pares. □

El problema de los triángulos pitagóricos. Este problema consiste en encontrar todos los triángulos rectángulos que tienen coordenadas enteras, como el de la Figura 5.3. El teorema de pitágoras nos dice que el área del triángulo C de la figura es igual a la suma de las áreas de los triángulos A y B. Se sigue que los lados del triángulo deben ser soluciones enteras de la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$. Diremos que un triángulo pitagórico es primitivo, si los enteros a, b y c no tienen divisores comunes. Como multiplicar los lados de cualquier triángulo pitagórico por un entero, o dividirlos por un divisor común, produce un nuevo triángulo pitagórico, es suficiente con encontrar los triángulos primitivos.

A fin de resolver este problema, utilizaremos la aritmética del anillo de Gauss. Re-escribimos la ecuación en la forma $(a + bi)(a - bi) = c^2$. En otras palabras, tenemos que la norma del entero de Gauss $z = a + bi$ es un cuadrado. Si escribimos la factorización prima $z = u\pi_1^{\alpha_1}\pi_2^{\alpha_2} \cdots \pi_N^{\alpha_N}$, vemos que ninguno de los π_i puede ser un primo racional, por la condición de que a y b sean relativamente primos. Del mismo modo, comparando la descomposición anterior con $\bar{z} = \bar{u}\bar{\pi}_1^{\alpha_1}\bar{\pi}_2^{\alpha_2} \cdots \bar{\pi}_N^{\alpha_N}$, Debemos concluir que los divisores primos de z no pueden incluir dos primos conjugados, y que el primo $1 + i$

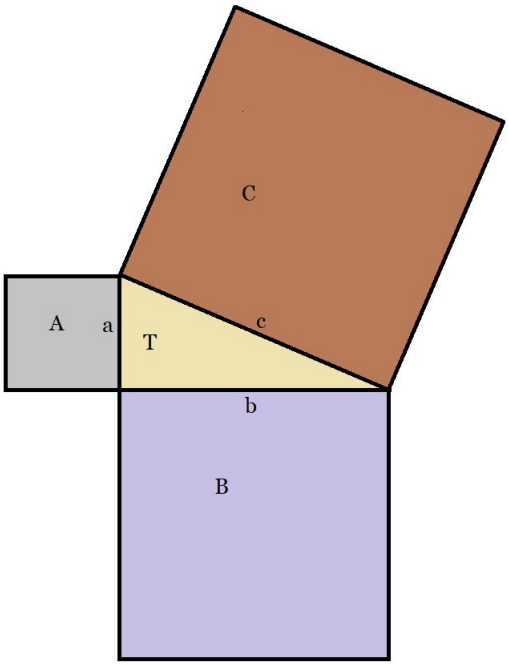


Figure 5.3: Un triángulo pitagórico.

no puede aparecer con una potencia que exceda 1. Multiplicando ambas factorizaciones se obtiene

$$c^2 = z\bar{z} = (\pi_1\bar{\pi}_1)^{\alpha_2}(\pi_1\bar{\pi}_2)^{\alpha_2}\cdots(\pi_N\bar{\pi}_N)^{\alpha_N},$$

donde hemos usado que $u\bar{u} = 1$ si u es una unidad. Cada uno de los productos $\pi_N\bar{\pi}_N$ es un primo racional. Se sigue que los exponentes α_i deben ser todos pares y que $1+i$ no aparece en la descomposición. En particular, $z = uw^2$ donde u es unidad y w es un entero de Gauss. Cambiando el orden o los signos de x e y, podemos suponer que $u = 1$. En conclusión, se tiene

$$a + ib = z = w^2 = (c+di)^2 = (c^2 - d^2) + 2cdi.$$

Esto demuestra el siguiente resultado:

Proposición 5.23. *Los catetos de un triángulo pitagórico tienen lados de la forma* $2cd$ *y* $c^2 - d^2$*, donde* c *y* d *son enteros.* □

Sumas de cuadrados. Supongamos que un entero n se escribe como suma de cuadrados, en la forma $x^2 + y^2 = n$. Razonando como antes, definimos $z = x+iy$, el cual es un entero de Gauss de norma n. Como antes, escribimos la factorización prima $z = u\pi_1^{\alpha_1}\pi_2^{\alpha_2}\cdots\pi_N^{\alpha_N}$, de la que se concluye que

$$n = |z|^2 = |\pi_1|^{\alpha_1}|\pi_2|^{\alpha_2}\cdots|\pi_N|^{\alpha_N}.$$

Cada factor $|\pi_i|$ es un primo o el cuadrado de un primo. Lo último sólo en el caso de que se trate de un primo de la forma $4k-1$. Se sigue que para cada primo p, de la forma $4k-1$, que divide a n, debemos tener que $v_p(n)$ es par. Por otro lado, cuando esta condición se cumple, podemos escoger primos del anillo de Gauss con el valor absoluto apropiado, en cada caso. Podemos, por lo tanto, concluir el siguiente resultado:

Proposición 5.24. *Un entero n puede escribirse como suma de dos cuadrados si y sólo si $v_p(n)$ es par para cada primo de la forma $4k-1$ que divide a n.* □

En general, la solución no es única, dado que es posible intercambiar $\pi = a + bi$ por su conjugado $a - bi$ para algunos de los primos de la forma $4k + 1$. La forma en que esto influye en las soluciones se ilustra en algunos de los ejemplos siguientes:

Ejemplo 5.25. La ecuación $x^2 + y^2 = 35 = 5 \times 7$ no tiene solución, ya que 7 es de la forma $4k - 1$, y el exponente correspondiente es impar.

Ejemplo 5.26. Para resolver la ecuación $x^2+y^2 = 245 = 5\times7^2$ factorizamos como $(x + yi)(x - yi) = 5 \times 7^2$. Como 7 es de la forma $4k - 1$, debe ser un primo en $\mathbb{Z}[i]$. Se sigue que algún factor al lado izquierdo debe ser divisible por 7, y por lo tantos ambos, ya que son conjugados. Se sigue que $x + yi = 7(a + bi)$ donde $a^2 + b^2 = 5$. Una posible solución es $a = 2$, $b = 1$, lo que dá $x + yi = 14 + 7i$. Obtenemos la solución $14^2 + 7^2 = 245$. En este caso la solución es única salvo orden o signo, ya que sólo hay un primo de la forma $4k + 1$.

Ejemplo 5.27. Para resolver la ecuación $x^2 + y^2 = 377 = 13 \times 29$, se debe encontrar un entero de Gauss de norma 13 y uno de norma 29y multiplicarlos. Partimos de las soluciones $2^2 + 3^2 = 13$ y $5^2 + 2^2 = 29$, por lo que podemos tomar $x+yi = (2+3i)(5+2i) = 4+19i$, lo que da la solución $4^2+19^2 = 377$. Sin embargo, podemos tomar también $x + yi = (2 + 3i)(5 - 2i) = 16 + 11i$, lo que da la solución alternativa $16^2 + 11^2 = 377$.

Ejemplo 5.28. Para resolver la ecuación $x^2 + y^2 = 289 = 17^2$, se debe encontrar un entero de Gauss de norma 17 y elevarlo al cuadrado, o bien multiplicar dos primos distintos de esa norma. En el primer caso escribimos $x+yi = (4+i)^2 = 15+8i$, lo que da la solución $15^2+8^2 = 289$. En el segundo caso tenemos $x+yi = (4+i)(4-i) = 17$. Esto da la solución $17^2+0^2 = 289$.

El ajedrez infinito. Una interpretación natural del anillo de enteros de Gauss es la del conjunto de casillas de un ajedrez infinito como el de la Figura 5.4. En este tablero interpretaremos cada casilla como un entero de Gauss,

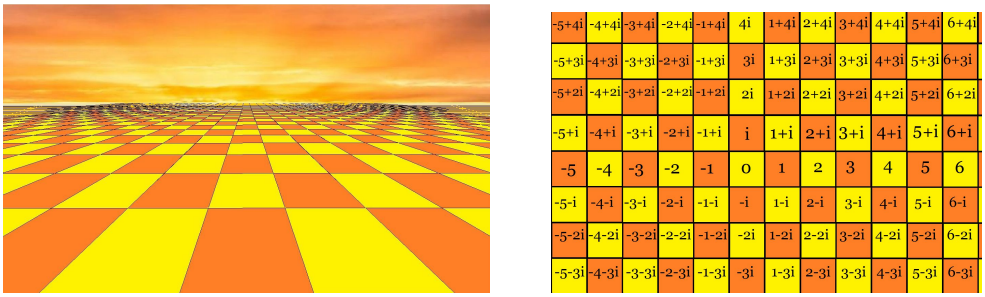


Figure 5.4: Un tablero de ajedrez infinito y su interpretación como el anillo de enteros de Gauss.

como se muestra a la derecha de la figura. Una pieza de ajedrez es un objeto que ocupa un casillero por vez y que puede despazarse de un casillero a otro mediante un cierto conjunto de reglas que son invariantes bajo rotaciones. En otras palabras, si una pieza de ajedrez puede ir de una casilla x a una casilla y, entonces puede también ir de x a la casilla z que se obtiene de y mediante una rotación de 90, 180 o 270 grados centrado en x. El ejemplo más representativo de esta definición es el caballo. Nótese que los movimientos ilustrados en la figura 5.5 se obtienen unos de otros mediante una rotación del tipo ya mencionado. En otras palabras, si el caballo se encuentra en una posición dada x, estonces puede alcanzar las posiciones $x + a$, $x + ia$, $x - a$ y $x - ia$, donde, en este caso $a = 2 + i$. Se sigue por iteración que esta pieza puede alcanzar cualquier posición del tipo $x + za$, donde z es un entero de Gauss. Nótese que los movimientos aquí considerados incluyen sólo giros del caballo a la izquierda. Llamaremos caballo zurdo a la pieza de ajedrez que sólo puede realizar estos movimientos. El caballo del juego tradicional de ajedrez puede

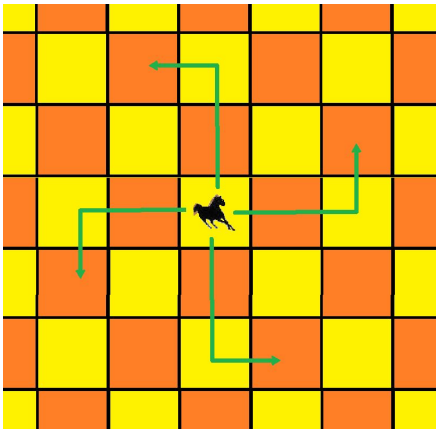


Figure 5.5: Movimientos del caballo zurdo.

también realizar giros a la derecha, lo que equivale a desplazarse en múltiplos de $2-i$. Dado que $2+i$ y $2-i$ son relativamente primos, se tiene la identidad entre ideales $(2+i)+(2-i)=(1)$, lo que nos dice que el caballo tradicional puede recorrer el tablero completo. En general, llamaremos (a,b)-caballo a una pieza de ajedrez que puede moverse utilizando múltiplos de un entero dado $a+bi$.

Ejemplo 5.29. El alfil es un $(1,1)$-caballo, es decir, puede recorrer todos los múltiplos de $1+i$, los que corresponden exactamente a las casillas de un mismo color en el tablero infinito.

Ejemplo 5.30. El camello es, por definición, un $(3,1)$-caballo y un $(3,-1)$-caballo, es decir, se mueve mediante múltiplos de $3+i$ y $3-i$. Dado que el máximo común divisor de estos dos enteros de Gauss es $1+i$, concluimos que el camello puede recorrer todas las casillas de un color.

Ejemplo 5.31. Consideremos ahora una pieza que puede realizar dos tipos de movimiento. puede moverse tres casillas en una dirección, para luego girar a la izquierda y avanzar una casilla. Alternativamente puede desplazarse cinco casillas en una dirección, para luego girar a la derecha y moverse dos casillas. Dada su naturaleza híbrida, llamaremos a esta pieza el hipogrifo (ver Figura 5.6). En este caso, un cálculo de máximo común vivior nos entrega $(3+i)+(5-2i)=(2-i)$. Concluímos que el hipogrifo recorre las mismas caillas que un caballo diestro.

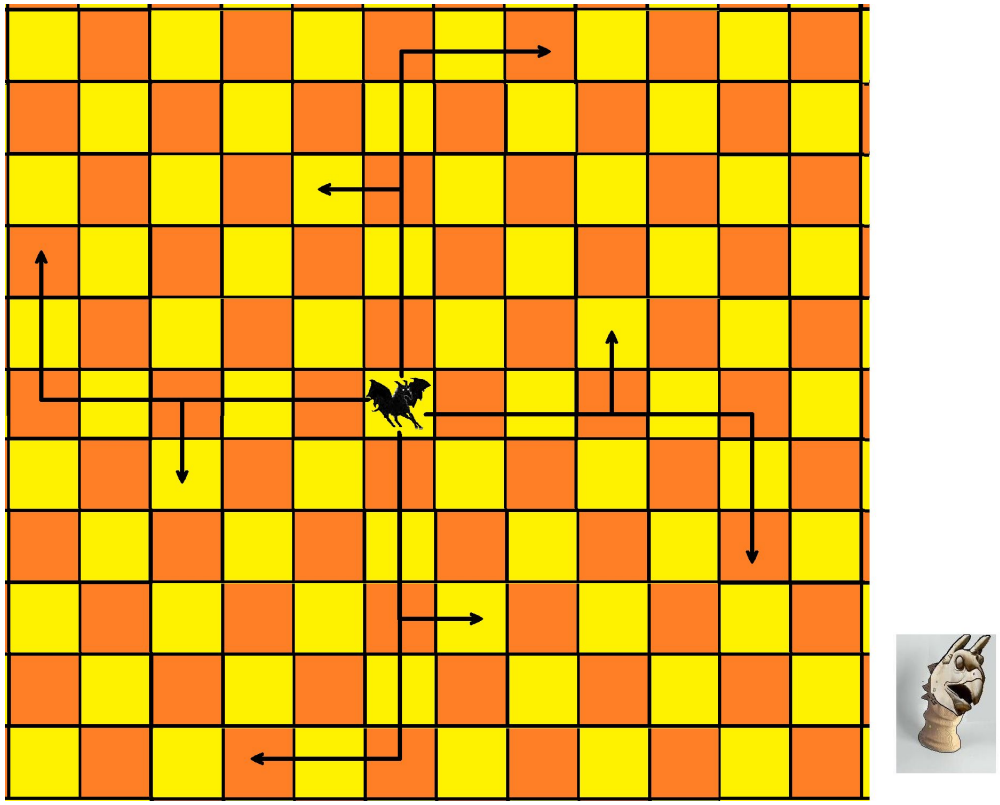


Figure 5.6: El hipogrifo.

Nótese que, de acuerdo a nestra definición general, los peones del ajedrez no se consideran piezas, ya que se mueven sólo en una dirección preferente. Ignoraremos aquí movimientos especiales como el que los peones hacen al comer, normalmente o al paso, o el salto inicial. En estas notas, un peón puede moverse en una única dirección, la que, por simplicidad, asumiremos que les permite pasar de una casilla dada x a la casilla $x + 1$. Un híbrido peón pieza es un objeto que puede realizar movimientos de peón aparte de los inherentes a una pieza, digmos un (a, b)-caballo. A tal objeto le llamaremos un (a, b)-mestizo. Un problema natural pregunta bajo que condiciones puede un mestizo recorrer todo el tablero. Daremos dos soluciones de este problema. Una geométrico-combinatorial, que usa directamente los movimientos del mestizo, y otra algebraica, via teoría de ideales.

Proposición 5.32. *Un (a, b)-mestizo puede recorrer todo el tablero si y sólo si a y b son relativamente primos.*

Demostración. Asumiremos que a y b son positivos, por lo que moverse a unidades a la derecha y b hacia arriba nos deja en el primer cuadrante. Los casos restantes son similares, dado que todo entero de Gauss tiene una rotación que lo ubica en el primer cuadrante. Utilizando rotaciones en 90 y 180 grados en sentido levógiro de ese movimiento, es decir, multiplicandolo por i o -1, es posible llevar el mestizo atras tan lejos como se quiera. En la Figura 5.7 asumimos que $a = 3$ y $b = 2$. Si se utiliza ta veces la primera

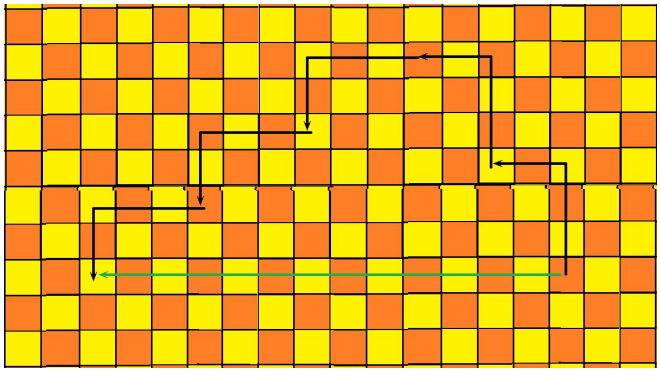


Figure 5.7: Un retroceso.

rotación y tb veces la segunda, el mestizo queda ubicado exáctamente atras de la casilla de partido, luego de lo cual se puede volver tanto como se quiera mediante movimientos de peón. Esto nos dice que el mestizo puede desplazarse arbitrariamente en una fila, por lo que basta probar que puede colocarse en cualquier fila. Ahora observamos que las cuatro rotaciones suman b, a, $-b$ y $-a$ al nḿero de la fila, por lo que, para colocarse en la fila número n, es suficiente con escribir n como combinación lineal de a y b, lo que puede hacerse para un n arbitrario si y sólo si a y b son relativamente primos. □

Para dar una demostración puramente algebraica necesitamos una afirmación equivalente. Observemos que un (a, b)-caballo puede, partiendo del origen, colocarse en cualquier casilla que corresponda a un múltiplo de $z = a + bi$. Es suficiente, por lo tanto, comprobar que los avances de peón nos

permiten recorrer todas las clases de congruencia módulo z. Como un avance de peón consiste en sumar uno, esto equivale a que cada clase de congruencia sea la clase de un entero racional. En otras palabras, se tiene el resultado siguiente:

Proposición 5.33. *Un (a, b)-mestizo puede recorrer todo el tablero si y sólo si $\mathbb{Z}[i]/(a + bi) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ para algún entero racional n.*

Se sigue que la afirmación sobre mestizos es equivalente al siguiente resultado:

Proposición 5.34. *Si $z = a + bi$ es un entero de Gauss, entonces existe un entero n tal que $\mathbb{Z}[i]/(z) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si y sólo si a y b son relativamente primos.*

Demostración. Sea $n = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$ y sea $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Un cálculo directo nos da lo siguiente:

$$\mathbb{Z}[i]/(z) = \mathbb{Z}[i]/(z, n) \cong \mathbb{Z}[x]/(a + bx, n, x^2 + 1) \cong R[x]/(a + bx, x^2 + 1).$$

Asumamos primero que a y b son relativamente primos, de modo que b sea relativamente primo con n. Sea k el inverso de b en R. En este caso se tiene lo siguiente:

$$R[x]/(a + bx, x^2 + 1) \cong R/\Big((-ak)^2 + 1\Big) \cong R.$$

En el primer paso se evalua en $-ak$, que es la raiz de $a + bx$, y en el último se usa que $(-ak)^2 + 1 = k^2(a^2 + b^2) = 0$. En el caso general utilizamos el hecho de que cada elemento de $R[x]/(x^2 + 1)$ se escribe de manera única en la forma $c + dx$, dado que $x^2 + 1$ es mónico. Si d es el MCD de a y b, es fácil ver que todo múltiplo de $a + bx$ tiene un coeficiente en x divisible por d. Se concluye que, si $d > 1$, la clase de $x - r$ en el cociente $R[x]/(a + bx, x^2 + 1)$ no se anula para ningún entero r. Esto concluye la prueba. □

La demostración vía ideales nos entrega fácilmente la siguiente versión del resultado original:

Proposición 5.35. *Si a y b son relativamente primo, nn (a, b)-mestizo puede llegar a cualquier casilla del tablero utilizando menos de $a^2 + b^2$ movimientos de peón. Además, esta cota es optimal.* □

5.4 Enteros de Eisenstein

Nuestro segundo ejemplo es el anillo $\mathbb{Z}[\omega]$, donde $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = e^{2\pi i/3}$ es una raiz cúbica primitiva de la unidad. Este se conoce como el anillo de enteros de Eisenstein. Este anillo cumple un papel significativo en el estudio de ecuaciones diofánticas del tipo $x^3 + y^3 = a$. Nótese que el elemento ω es una raiz del polinomio

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1,$$

el que es un polinomio cuadrático, por lo que es anillo de Eisenstein es un anillo de enteros cuadráticos. Por otro lado, ω^2 es la otra raiz cúbica primitiva de la unidad, por lo que es el conjugado complejo de ω. Se sigue que

$$\overline{a_0 + a_1\omega} = a_0 + a_1\omega^2 = a_0 + a_1(-1 - \omega) = (a_0 - a_1) - a_1\omega,$$

y que

$$|a_0 + a_1\omega|^2 = (a_0 + a_1\omega)(a_0 + a_1\omega^2) = a_0^2 - a_0a_1 + a_1^2,$$

donde se usa el hecho de que $\omega^3 = 1$ y $\omega + \omega^2 = -1$.

Comenzaremos, como antes, comprobando que este anillo es un dominio euclideano. Este resultado tiene también una demostración geométrica.

Proposición 5.36. *El anillo $\mathbb{Z}[\omega]$ es un DE.*

Demostración. Como antes, utilizamos la proposición 5.17, esta vez con $\eta = \omega$. En este caso el paralelógramo Γ se subdivide fácilmente en dos triángulos equiláteros como se muestra a la ixquierda de la Figura 5.8. Basta ver que todo punto interior a uno de estos triángulos se encuentra a una distancia menor a uno de algún vértice. De hecho, en este caso esto es cierto para cualquiera de los vértices. Esto se vé fácilmente del hecho de que el círculo de radio uno centrado en uno de los vértices contiene totalmente al triángulo, como se vé a la derecha de la misma figura. □

Lo anterior es suficiente para demostrar que $\mathbb{Z}[\omega]$ es un DE. Para efectos de estudiar la eficiencia del algoritmo en este anillo, el Lema 5.38, probado más abajo, puede ser útil.

Lema 5.37. *Para todo punto D, interior a un triángulo ABC como el de la Figura 5.9, la suma de los largos de los segmentos AD y DB es inferior a la suma de los lados AC y BC.*

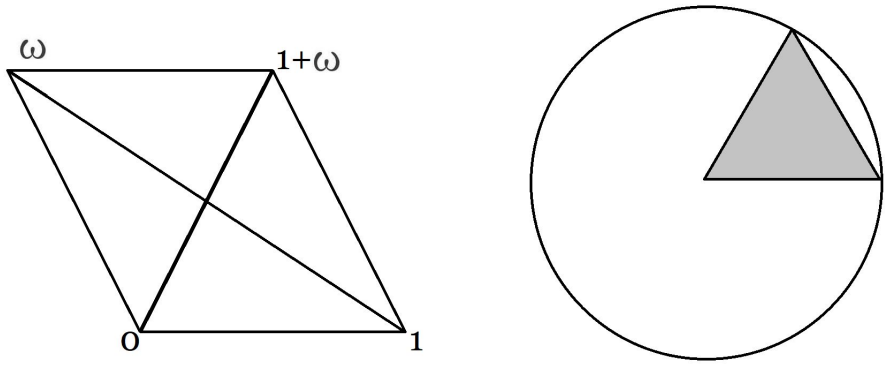


Figure 5.8: El paralelógramo fundamental del anillo de Eisenstein.

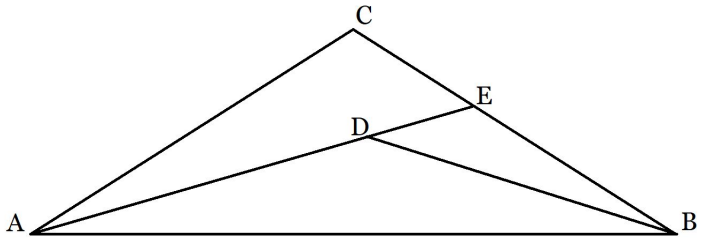


Figure 5.9: Caminos en un triángulo.

Demostración. La suma de los segmentos AD y DB, en la figura, es menos a la suma de los segmentos AE y EB, como se prueba fácilmente a partir de la instancia $DE + EB > DB$ de la desigualdad triangular. Del mismo modo, $AC + CE > AE$ demuestra que $AC + CB > AE + EB$. □

Lema 5.38. *Todo punto interior de un triángulo equilátero de lado* 1 *está a una distancia no mayor a* $\frac{\sqrt{3}}{3}$ *de alguno de los vértices, con igualdad si y sólo si el punto es el baricentro del triángulo.*

Demostración. Se subdivide el triángulo en tres subtriángulos como muestra la Figura 5.10, donde u es el baricentro. Todo punto interior debe estar contenido en alguno de ellos. Si está en el inferior, como el punto z de

la figura, se tiene $|z| + |1 - z| < |u| + |1 - u| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, por lo que $|u| < \frac{\sqrt{3}}{3}$, o bien $|1 - u| < \frac{\sqrt{3}}{3}$. Los casos restantes son análogos. □

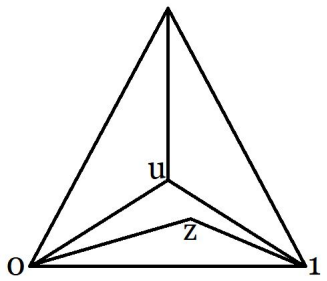


Figure 5.10: Distancia a los vértices.

El lema anterior muestra que la división con resto en el anillo de Eisenstein puede realizarse de modo que un elemento z puede escribirse siempre en la forma $z = qw+r$, de modo que el resto r satisfaga $|r| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}|w|$. En particular, concluímos que el algoritmo de euclides, si se aplica eficientemente, permite encontrar el máximo común divisor más rapidamente aqí que en el anillo de Gauss.

Proposición 5.39. *Todo primo del anillo de Eisenstein divide a un primo racional. Los primos del anillo de Eisenstein son los primos racionales de la forma* $3k-1$*, los primos de la forma* $a+b\omega$*, donde* a^2-ab+b^2 *es un primo de la forma* $3k+1$*, y el primo* $\omega - 1$*, el cual divide a* 3*.*

Demostración. La primera afirmación se prueba observando que todo primo π del anillo de Eisenstein divide a $|\pi|^2 = \pi\bar{\pi}$, y por lo tanto a alguno de sus factores primos, al igual que para el anillo de Gauss. Nótese que en este caso el conjugado de $\pi = a + b\omega$ es $a + b\omega^2$. El primo racional 3 se factoriza como $3 = (\omega - 1)(\omega^2 - 1) = (\omega + 1)(\omega - 1)^2 = -\omega^2(\omega - 1)^2$. Para ver que $\omega - 1$ es un primo realizamos el cálculo

$$\mathbb{Z}[\omega]/(\omega - 1) = \mathbb{Z}[x]/(x - 1, x^2 + x + 1) \cong \mathbb{Z}/\Big((1)^2 + (1) + 1\Big) \cong \mathbb{F}_3.$$

Del mismo modo investigamos bajo que condiciones un primo racional $p \neq 3$ es primo en el anillo de Eisenstein:

$$\mathbb{Z}[\omega]/(p) = \mathbb{Z}[x]/(p, x^2 + x + 1) \cong \mathbb{F}_p/(x^2 + x + 1).$$

Este último cociente es isomorfo a un producto $\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$, si el polinomio $x^2 + x + 1$ tiene dos raices distintas en $\mathbb{F}_p$. Cuando el polinomio no tiene raices, el cociente de arriba es una extensión cuadrática de $\mathbb{F}_p$. El polinomio tiene raices si el discriminante -3 es un cuadrado. Esto sucede si y sólo si $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$. Un cálculo encillo nos da

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{p}{3}\right).$$

Se sigue que los primos de la forma $3k - 1$ siguen siendo primos en $\mathbb{Z}[\omega]$. Esto incluye el caso $p = 2$. Los primos de la forma $p = 3k + 1$ se factorizan en $\mathbb{Z}[\omega]$, y sólo pueden hacerlo en dos primos $\pi = a + b\omega$ de largo $\sqrt{p}$. Estos primos satisfacen $p = |\pi|^2 = a^2 - ab + b^2$. □

Es posible probar que, para cada primo racional p y cada entero positivo n, existe un único cuerpo finito con p^n elementos. Este cuerpo se denota $\mathbb{F}_{p^n}$. Para detalles sobre la teoría de cuerpos finitos, el lector puede consultar los apuntes de estructuras algebraicas.

Proposición 5.40. *Un entero n tiene una expresión del tipo $n = a^2 - ab + b^2$ si y sólo si $v_p(n)$ es par para cada primo de la forma $3k - 1$ que divida a n.*

Demostración. Se pregunta si existe un elemento $z = a + b\omega \in \mathbb{Z}[\omega]$ cuyo valor absoluto sea $\sqrt{n}$. Si se escribe la factorización en primos

$$z = u\pi_1^{\alpha_1}\pi_2^{\alpha_2}\cdots\pi_N^{\alpha_N},$$

y se observa que $|u| = 1$, se obtiene

$$n = |z|^2 = |\pi_1|^{2\alpha_1}|\pi_2|^{2\alpha_2}\cdots|\pi_N|^{2\alpha_N},$$

donde cada factor $|\pi_1|^2$ es 3, un primo de la forma $3k + 1$ o el cuadrado de un primo de la forma $3k - 1$. La necesidad sigue de aquí, y la suficiencia del hecho de que siempre se pueden escoger un primo apropiados para cada uno de los factores, en cada caso. □

Ejemplo 5.41. La ecuación $x^2 - xy + y^2 = 35 = 5 \times 7$ no tiene solución, ya que 5 es de la forma $3k - 1$, y el exponente correspondiente es impar.

Ejemplo 5.42. La ecuación $x^2 - xy + y^2 = 231 = 7 \times 37$ puede resolverse encontrando primero soluciones para $x^2 - xy + y^2 = 231 = 7$ y $x^2 - xy + y^2 = 231 = 37$. La primera tiene la solución $x + y\omega = 2 - \omega$ y la segunda $x + y\omega = 4 - 3\omega$. Se sigue que una solución de la solución original es

$$x + y\omega = (2 - \omega)(4 - 3\omega) = 8 - 10\omega + 3\omega^2 = 5 - 13\omega.$$

Ejemplo 5.43. La ecuación $x^2 - xy + y^2 = 175 = 5^2 \times 7$ sólo tiene soluciones del tipo $x + y\omega = 5(r + s\omega)$, con $r^2 - sr + s^2 = 7$. Una solución nos dá $r = 2$ y $s = -1$, lo que nos da $w = r + s\omega = 2 - \omega$. Las restantes soluciones son de la forma uw o $u\bar{w}$, donde u es una unidad. Como las unidades tienen largo 1, es fácil ver que estas son los elementos del conjunto $\{\pm 1, \pm\omega, \pm\omega^2\}$. Esto nos dice que hay 12 soluciones esencialmente equivalentes. Estas son las siguientes:

$$\pm(r+s\omega),\ \pm\omega(r+s\omega) = \pm\Big(-s+(r-s)\omega\Big),\ \pm\omega^2(r+s\omega) = \pm\Big((s-r)-r\omega\Big)$$

y sus seis conjugados.

En el ejemplo precedente se necesita saber si los elementos de la forma uw o $u\bar{w}$, donde u es una unidad, son todos diferentes. De hecho, no es dificil ver que los elementos de la forma uw son los vértices de un hexágono regular centrado en el origen. Para que estos coincidan con los elementos de la forma $u\bar{w}$, es necesario y suficiente que el eje real sea un eje de simetría del hexágono. Esto ocurre exactamente cuando el argumento del complejo w es de la forma $\frac{k\pi}{12}$. Una mirada a la Figura 5.11 nos muestra que esto sólo puede ocurrir cuando w es un múltiplo entero racional de una unidad, o un múltiplo entero racional de $\omega - 1$ por una unidad.

La técnica nos permite también estudiar el problema más natural de la suma de dos cubos:

Ejemplo 5.44. La ecuación $x^3 + y^3 = 221 = 13 \cdot 17$ se factoriza como $(x+y)(x^2-xy+y^2) = 221$. Lo que nos lleva a $(x+y)|x+y\omega|^2 = 221$. Nótese que $|x+y\omega|^2$ no puede ser 17 ni 221, así que podemos intentar $|x+y\omega|^2 = 13$ o $|x+y\omega|^2 = 1$. Escribiendo cada una de las seis unidades en la forma $x+y\omega$, obtenemos soluciones para x e y que no suman 221. Nos queda $|x+y\omega|^2 = 13$,

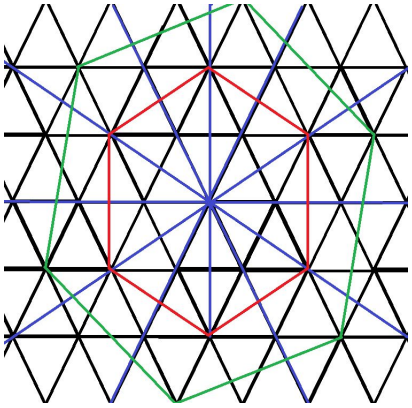


Figure 5.11: Un hexágono simétrico en rojo y uno asimétrico en verde.

lo que tiene las soluciones $x + y\omega = uw$ y $x + y\omega = u\bar{w}$, donde $w = 4 + 3\omega$. Esto nos da las soluciones $\{4, 3\}$, $\{3, -1\}$, $\{-1, -4\}$ para el par $\{x, y\}$, junto con sus negativos, lo que da 12 pares ordenados. Ninguna de estas soluciones satisface $x + y = 17$, por lo que 221 no puede ser la suma de dos cubos.

Ejemplo 5.45. Aplicando el mismo procedimiento a la ecuación $x^3 + y^3 = 91 = 13 \cdot 7$, obtenemos que $|x + y\omega|^2$ puede tomar cualquiera de los cuatro valores 1, 7, 13 o 91. Como antes, descartamos fácilmente $|x + y\omega|^2 = 1$. Si $|x + y\omega|^2 = 7$ debemos tener $x + y\omega = uw$ o $x + y\omega = u\bar{w}$, con $w = 2 - \omega$. Esto nos dá las soluciones $\{2, -1\}$, $\{3, 2\}$, $\{1, 3\}$ para el par $\{x, y\}$, junto con sus negativos. Nuevamente, ninguna de estas soluciones satisface $x + y = 13$. Al probar, $|x + y\omega|^2 = 13$, se tienen como antes las soluciones $\{4, 3\}$, $\{3, -1\}$, $\{-1, -4\}$ para el par $\{x, y\}$, junto con sus negativos. El primer par satisface $x + y = 7$, en tanto los otros se descartan. Esto nos da la solución $3^3 + 4^3 = 91$. Finalmente $|x + y\omega|^2 = 91$ tiene las solciones de la forma $x + y\omega = u\bar{w}$, con $w = 2 - \omega$, donde $w = (2 - \omega)(4 + 3\omega) = 11 + 5\omega$, o bien $w = (2 - \omega^2)(4 + 3\omega) = 9 + 10\omega$. La primera opción nos da las soluciones $\{11, 5\}$, $\{6, 11\}$, $\{-5, 6\}$ para el par $\{x, y\}$. La segunda nos da $\{9, 10\}$, $\{-1, -10\}$ y $\{-1, 9\}$. De todas estas, sólo $\{x, y\} = \{-5, 6\}$ satisface la condición $x + y = 1$, lo que nos da la solución $(-5)^3 + 6^3 = 91$.

Un contraejemplo minimal. Consideremos el anillo $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3} = \mathbb{Z}[2\omega + 1]$. Este es un subanillo del anillo de Eisenstein que contiene sólo

los puntos reticulares que se encuentran una fila por medio en la reticula de la Figura 5.12. Los puntos de R están marcados en rojo en esa figura. El

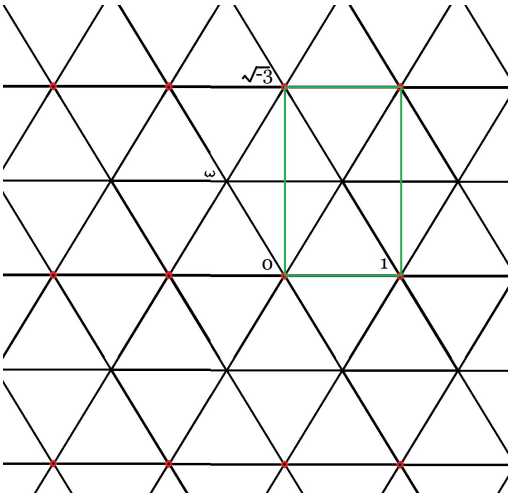


Figure 5.12: Un anillo no principal.

paralelógramo de vértices 0, 1, $\sqrt{-3}$ y $1+\sqrt{-3}$ se muestra en verde. Nótese que todo punto interior a este rectángulo está a una distancia inferior a uno de uno de los puntos rojos, exceptuando sólo al centro del rectángulo, que se encuentra a distancia 1 de cualquiera de las esquinas. El anillo R, sin embargo, no es un DIP. Esto se deduce del hecho de que todo DIP es normal, mientras que la clausura entera de R en su cuerpo de cocientes es el anillo de Eisenstein.

Es interesante buscar un ejemplo donde no se tenga factorización única en irreducibles. Por ejemplo se tiene

$$\left(\sqrt{-3}+1\right)\left(\sqrt{-3}-1\right)=4=2^2,$$

pero ninguno de los factores de la izquerda es divisible por 2 en el anillo R. Sin embargo, 2 es irreducible, dado que este anillo no tiene elementos de largo menor a $\sqrt{3}$, excepto 1, 0 y -1, como se aprecia fácilmente en el dibujo.

Un lema que nos será útil más adelante es el siguiente:

Lema 5.46. *Un entero de Eisenstein pertenece al anillo R de arriba si y sólo si es congruente a 0 o 1 módulo 2. Las únicas unidades que satisfacen esta condición son 1 y -1.*

Demostración. Como todo entero racional es congruente a 1 o 0 módulo 2, es suficiente probar que $R = \mathbb{Z} + 2\mathbb{Z}[\omega] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}(2\omega)$. Esto es inmediato de la Figura 5.12. La última afirmación es inmediata de la misma figura. □

Nótese que $\mathbb{Z}[\omega]/(2) \cong \mathbb{F}_4$. Se sigue que el conjunto $\Big(\mathbb{Z}[\omega]/(2)\Big)^*$ es un grupo cíclico con tres elementos.

El caso $n = 3$ de la ecuación de Fermat. Nuestro próximo consiste en aplicar la aritmética del anillo de Eisenstein, y del anillo R, al estudio de la ecuación de Fermat. Para ello necesitamos los siguientes lemas previos:

Lema 5.47. *Si u y v son relativamente primos con $u + v$ impar, entonces el elemento $u - v\sqrt{-3}$ no es divisible por ningún primo racional en $\mathbb{Z}[\omega]$.*

Demostración. Para ver que $\frac{z}{p} = \frac{u}{p} + \frac{v}{p}\sqrt{-3}$ no es entero, basta ver que los enteros de Eisenstein tienen la forma $a + b\omega = \frac{2a+b}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{-3}$, con a y b enteros, por lo que ningún primo impar puede aparecer en el denominador, y el primo 2 sólo si aparece en ambos, mientras que nosotros asumimos que $u + v$ es impar, por lo que u y v no pueden ser ambos impares. □

Lema 5.48. *Si s es impar y satisface la ecuación $s^3 = u^2 + 3v^2$, donde $u + v$ es impar y $(u) + (v) = (1)$, entonces existen enteros e y f que satisfacen la relación siguiente:*

$$u - v\sqrt{-3} = \Big(e - f\sqrt{-3}\Big)^3.$$

Además, s no es divisible por 2 ni 3.

Demostración. Definimos $z = u + v\sqrt{-3}$, y consideramos la factorización prima $z = w\pi_1^{\alpha_1} \cdots \pi_N^{\alpha_n}$. Conjugando, se tiene $\bar{z} = \bar{w}\bar{\pi}_1^{\alpha_1} \cdots \bar{\pi}_N^{\alpha_n}$, y por lo tanto $|z|^2 = |\pi_1|^{2\alpha_1} \cdots |\pi_N|^{2\alpha_n}$. El hecho de que u y v sean relativamente primos, con $u + v$ impar, muestra que z no es divisible por ningún primo racional, por el lema precedente. Esto nos dice que en la descomposición de z no puede aparecer ningún primo de la forma $3k - 1$, ningún par de primos no asociados de la misma norma, y el primo $\omega - 1$ no puede aparecer elevado a una potencia superior a uno. En particular, esto muestra que $|z|^2 = |\pi_1|^{2\alpha_1} \cdots |\pi_N|^{2\alpha_n}$ es la descomposición prima de $|z|^2 = s^3$, por lo que los exponentes deben ser todos divisibles por 3. Se sigue que z es un

cubo, salvo unidades. Además, 2 no divide a s, por ser de la forma $3k-1$, ni tampoco 3, dado que $(\omega-1)^3$ no puede dividir a $|z|^2$. Por otro lado, z es conguente a 1 módulo dos (por ser un elemento de R no divisible por 2), mientras que todo cubo perfecto de un elemento no divisible por 2 tiene esa misma propiedad, dado que $\Big(\mathbb{Z}[\omega]/(2)\Big)^*$ es un grupo cíclico con tres elementos. Concluímos que la unidad es 1 o -1, y en cualquier caso z es un cubo, por lo que podemos escribir $z=w^3$. Multiplicando por una unidad, de ser necesario, podemos suponer que w es congruente a 1 módulo 2, por lo que es también de la forma $w=e+f\sqrt{-3}$. El resultado sigue. □

Demostraremos que la ecuación $a^3+b^3+d^3=0$ no tiene soluciones enteras no triviales. Como $(-1)^3=-1$, esto es equivalente a $a^3+b^3=c^3$, con $c=-d$. la primera forma es simétrica, por lo que, asumiendo que las soluciones sean relativamente primas, puede asumirse que a y b son impares. Como c^3 es par, y por lo tanto divisible por 8, tenemos

$$a+b=a^3+b^3+a(1-a^2)+b(1-b^2)\cong a^3+b^3=c^3\cong 0 \pmod 8.$$

Utilizaremos también los elementos $u=\frac{a+b}{2}$ y $v=\frac{a-b}{2}$. Nótese que $a=u+v$ y $b=u-v$. En términos de estos elementos se tiene $a+b=2u$ y

$$z=(u+v)+(u-v)\omega=u(1+\omega)+v(1-\omega)$$

$$=(1+\omega)\left(u+v\frac{1-\omega}{1+\omega}\right)=(1+\omega)\Big(u-v\sqrt{-3}\Big),$$

con u par y v impar. Además son relativamente primos, o a y b no lo serían. Este remplazo es conveniente, dado que calcular valores absolutos es más sencillo en el anillo $R=\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$. Nótese que $1+\omega=-\omega^2$ es una unidad. En particular, se tiene $|z|^2=u^2+3v^2$.

Afirmamos que el máximo común divisor de z con $a+b$ es 1 o $\omega-1$. Esto sigue de observar que cualquier divisor común divide también a los siguientes:

$$(a+b\omega)-(a+b)=(\omega-1)b,\qquad \omega(a+b)-(a+b\omega)=(\omega-1)a.$$

Un cálculo similar se aplica a los pares $(z,\bar{z})$ y $(\bar{z},a+b)$. Esto nos reduce a dos casos:

- Asumamos primero que $\omega-1$ no divide a z. En particular, tampoco divide a $\bar{z}$, por lo que z, $\bar{z}$ y $a+b$ deben ser relativamente primos a

pares. Se concluye que tanto $a+b = 2u$ como $|z|^2 = u^2-3v^2$ son cubos. Digamos $r^3 = 2u$ y $s^3 = |z|^2$. En particular, el lema precdente muestra que $u - v\sqrt{-3}$ es un cubo de un elemento de la forma $w = e - f\sqrt{-3}$. Un cálculo directo nos da las relaciones

$$s = e^2 + 3f^3, \qquad u = e(e^2 - 9f^2), \qquad v = 3f(e^2 - f^2).$$

Como v es impar, se deduce que f es impar y e par. También son relativamente primos, ya que, si algún primo racional divide a w, lo mismo ocurre con z, contradiciendo el Lema 5.47.

Nótese que $r^3 = 2u = 2e(e-3f)(e+3f)$. Afirmamos que los factores $2e$, $e-3f$ y $e+3f$ son relativamente primos a pares. Como $(e-3f)+(e+3f) = e$, basta ver que ningún primo divide simultaneamente a los tres. Los enteros $e-3f$ y $e+3f$ son impares y e no puede ser divisible por 3, o también lo sería s, contradiciendo el Lema precedente. Para cualquier $p > 3$, Si p divide a $2e$ y $e-3f$, también divide a $2e-2(e-3f) = 6f$, lo que contradice la hipótesis de que e y f son relativamente primos. Concluímos que cada uno de ellos es un cubo perfecto. Poniendo

$$-2e = k^3, \qquad e - 3f = j^3, \qquad e + 3f = m^3,$$

se obtiene la solución no trivial $j^3 + m^3 + k^3 = 0$.

- Asumamos ahora que $\omega - 1$ divide a z. En este caso, $|z|^2$ es divisible por 3. Sin embargo, $(\omega-1)^2 = -3\omega$ no divide a z por el Lema 5.47, por lo que $|z|^2$ no es divisible por 3. Como $a^3 + b^3 = 2u|z|^2$ es un cubo perfecto, 2u debe ser divisible por 9. En particular, podemos escribir $u = 3g$. Escribimos

$$u - v\sqrt{-3} = -\left((-3)g + v\sqrt{-3}\right) = -\sqrt{-3}\left(v - g\sqrt{-3}\right)$$

$$= \omega(\omega-1)\left(v - g\sqrt{-3}\right).$$

Se sigue que $c^3 = 18g|y|^2$, con $y = v - g\sqrt{-3}$. Ahora $|y|^2 = \frac{|z|^2}{3}$ no es divisible por 3, por lo que es relativamente primo con $18g = 3(2u)$. Se sigue que tanto $18g$ como $|y|^2$ son cubos perfectos. Digamos $r^3 = 18g$ y $s^3 = |y|^2$. Además g y v son relativamente primos, y $g+v = u+v-2g$ es impar. Se concluye que y es un cuadrado en R por el lema previo.

Escribimos $y = w^3$ con $w = e - f\sqrt{-3}$. Un cálculo directo nos da las relaciones

$$s = e^2 + 3f^3, \qquad v = e(e^2 - 9f^2), \qquad g = 3f(e^2 - f^2).$$

Como v es impar, se deduce que e es impar y f par. También son relativamente primos, ya que, si algún primo racional divide a w, lo mismo ocurre con z, contradiciendo el Lema 5.47.

Nótese que $r^3 = 18g = 54f(e-f)(e+f)$, por lo que $(\frac{r}{3})^2 = 2f(e-f)(e+f)$. Se deduce como antes que $2f$, $e-f$ y $e+f$ son coprimos a pares, salvo que no se necesita un argumento para el primo 3. Ahora se escribe

$$-2f = k^3, \qquad f - e = j^3, \qquad f + e = m^3.$$

En cualquier caso se obtiene una solución de la ecuación de Fermat con números que resultan ser más pequeños, dado que jkm es un factor de c, en cada caso. Esto produce una contradicción si se parte, por ejemplo, con una solución con $|a| + |b| + |c|$ minimal. □

Hexajedrez. En analogía al ajedrez infinito descrito en la sección anterior, es posible definir un juego de ajedrez hexagonal, o hexajedrez, como el que se ilustra en la Figura 5.13. En este tablero, el equivalente a las piezas reciben

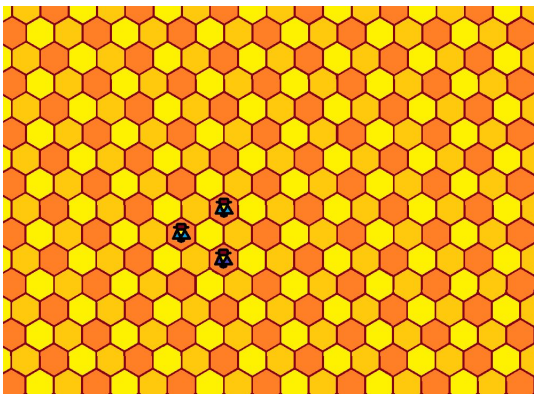


Figure 5.13: El Hexajedrez.

el nombre de abejas. En este caso, los desplazamientos horizontales o verticales se remplazan por desplazamientos en cualquiera de las seis direcciones que permiten pasar de una casilla x a otra casilla y con la que x comparte un borde. Estos desplazamientos se obtienen unos de otros mediante una rotación en un múltiplo de 60 grados, lo que corresponde a una multiplicación por una de las seis unidades del anillo de Eisenstein. Una (a, b)-abeja puede desplazarse a casillas en una de tales direcciones, para luego girar 120 grados en sentido antihorario y avanzar b casillas en la nueva dirección. El estudio de los tipos de abejas híbridas que pueden recorrer este tablero en su totalidad se realiza con el apoyo de la aritmética del anillo de Eisenstein, en completa analogía con el ajedrez infinito descrito antes. Nótese, en particular, que este tablero se colorea usando tres colores, que corresponden a las 3 clases residuales módulo $\omega - 1 = \omega\sqrt{-3}$. Una abeja se mueve entre casillas del mismo color si y sólo si todos sus movimientos permitidos son divisibles por $\omega - 1$.

También pueden en este caso definirse mestizos, que combinan los movimientos de una (a, b)-abeja con movimientos individuales (de hormiga?) en una dirección única. Tal como ocurre en el ajedrez, es posible demostrar que tales mestizos pueden recorrer todo el tablero. Estas generalizaciones se desarrollan en los ejercicios.

5.5 Ejercicios

1. Factorice completamente $6 + 8i$ y $12 + 5i$ en $\mathbb{Z}[i]$.

2. Factorice completamente $12\omega + 3$ y $8\omega + 3$ en $\mathbb{Z}[\omega]$.

3. Probar que $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ es un DIP.

4. Sea $u = \frac{1+\sqrt{-7}}{2}$. Probar que $\mathbb{Z}[u]$ es un DIP.

5. Probar que $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ no es un DIP, encontrando un primo racional que sea irreducible pero no primo en ese anillo. Repita lo mismo para $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$.

6. De un ejemplo de un ideal no principal en $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

7. De un ejemplo de un ideal no principal en $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$. Sugerencia: Observe que si $B \subseteq A$ son anillos, todo ideal de A contenido en B es un ideal de B.

8. Encuentre todos los pares de enteros (a, b) tales que $a-bi$ es un multiplo (en el anillo de enteros de Gauss) de $a + bi$.

9. Encuentre todos los pares de enteros (a, b) tales que $a + b\omega^2$ es un multiplo (en el anillo de enteros de Eisenstein) de $a + b\omega$.

10. Encuentre todas las maneras de escribir 1729 como suma de dos cubos de números enteros.

11. Sea D un DFU, sea L un cuerpo que contiene a D, y sea $\alpha \in L$ un elemento que es entero sobre D (es decir que satisface algún polinomio mónico con coeficientes en D). Probar que el polinomio irreducible de α sobre el cuerpo $K = \text{Quot}(D)$ tiene coeficientes en D.

12. Sea D un dominio de integridad, y sea K su cuerpo de cocientes. Probar que una matriz $A \in \mathbb{M}_n(K)$ es entera sobre D (es decir que satisface un polinomio con coeficientes en D) si y sólo si sus valores propios (en $\overline{K}$) son enteros sobre D.

13. Sea K un cuerpo y sean D y D' dos dominios de integridad contenidos en K. Suponga que los cuerpos de cocientes de D y D' coinciden. Probar que si $\alpha \in K$ es entero simultaneamente sobre D y D', entonces es entero sobre $D \cap D'$.

14. Sea D un dominio de integridad, sea L un cuerpo que contiene a D, y sea $\alpha \in K$ un elemento algebraico sobre $K = \text{Quot}(D)$. Probar que si existe $n \in D$ tal que $n\alpha$ es entero sobre D.

15. Probar que si D es un DIP, también lo es $D[1/d]$ para todo $d \in D$.

16. Probar que si
$$R = \mathbb{Z}\left[x, \frac{1}{x+1}\right]$$
entonces $R/(x^2+x+1)$ es un dominio de ideales principales (Sugerencia: usar que $\mathbb{Z}[x]/(x^2+x+1)$ es isomorfo al anillo de enteros de Eisenstein).

17. Describa el anillo $A/(x^2+1)$ donde $A = \mathbb{Z}[x, x^{-1}]$.

18. Sea $f(x) = x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio mónico irreducible con coeficientes enteros. Sea α una raiz de f y suponga que $\mathbb{Z}[\alpha]$ es un dominio de ideales principales. Probar que existen infinitos primos en $\mathbb{Z}[\alpha]$.

19. Considere la $\mathbb{R}$-álgebra $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con operaciones por coordenada. Sea d un entero positivo libre de cuadrados. Muestre que el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es isomorfo al subanillo D de A generado por $1_D = (1, 1)$ y $\delta = (\sqrt{d}, \sqrt{-d})$.

20. En las notaciones de la pregunta anterior, asuma que el rectángulo de vértices $0_D, 1_D, \delta, \delta + 1_D$ puede ser totalmente cubierto por regiones abiertas de la forma $z + U$ con $z \in D$ y $U = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | xy < 1\}$. Demuestre que $g(x + y\sqrt{d}) = |x^2 - dy^2|$ es un algoritmo de Euclides para el anillo D. Concluya que D es un DIP.

21. Extienda los dos ejercicios precedentes a anillos de la forma $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right]$, con $d = 4k + 1$.

22. Usar los ejercicios anteriores para probar que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ y $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ son dominios Euclideanos.

23. Sea L/K una extensión finita de cuerpos, y sea Ω un dominio de integridad cuyo cuerpo de cocientes es L. Sea $D = K \cap \Omega$. Es necesariamente cierto que Ω es entero sobre D? Demuestre dicha afirmación o de un contraejemplo.

Chapter 6

Valuaciones y valores absolutos

En este capítulo se inicia el estudio de una herramienta que será clave en el estudio subsecuente de la teoría de números algebraicos. Es la teoría de Valores absolutos, la que conecta el estudio algebraico de ciertos anillos y cuerpos, especialmente aquellos de interés en esta área, con conceptos de la topología o el análisis. Este estudio tomará dos capítulos, pero facilitará en gran medida el trabajo de los último capítulos.

6.1 Valuaciones

Una valuación, en un cuerpo K, es una función $v : K \to \mathbb{R}$ que posee las siguientes propiedades:

1. Para cada par de elementos $a, b \in K^*$, se tiene $v(ab) = v(a)v(b)$.
2. Para cada par de elementos $a, b \in K^*$, se tiene $v(a+b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$.

Una valuación es trivial si $v(a) = 0$ para cada elemento $a \in K^*$. En caso contrario se dice que es no trivial. A menudo se extiende la valuación al cero mediante $v(0) = \infty$, donde ∞ es, por convención, un elemento que satisface $r \leq \infty$ y $r + \infty = \infty$ para cualquier número real r. El concepto de valuación se extiende a anillos más generales, y, de hecho, la existencia de una valuación sobre un anillo puede utilizarse para probar que tal anillo carece de divisores de cero. Por ahora, nos concentraremos en el caso de cuerpos. Sin embargo, nuestro principal ejemplo de valuación se define, en principio, sobre un anillo. Especificamente, si D es un dominio de ideales

principales, y $p \in D$ es un primo, la valuación p-ádica se define por $v_p(n) = t$, donde $n = n_0 p^t$ y p no divide a n_0. Tal t está bien definido por la unicidad de la factorización en primos. Es fácil comprobar que esta función satisface la definición. De hecho, si $n = n_0 p^t$ y $m = m_0 p^s$, con $n_0, m_0 \notin (p)$, entonces $nm = n_0, m_0 p^{t+s}$, con $n_0 m_0 \notin (p)$ por definición de primo. Además, si $t \leq s$ se tiene $n + m = (n_0 + m_0 p^{s-t}) p^t$. En este último caso no puede decirse apriori si p divide a $n_0 + m_0 p^{s-t}$ o no, de ahí la desigualdad no estricta. Si K es el cuerpo de cocientes de D, la valuación p-ádica se extiende a todo K mediante la fórmula

$$v\left(\frac{a}{b}\right) = v(a) - v(b).$$

Esto tiene sentido, dado que $b \neq 0$, por lo que se resta un número finito. Además está bien definido, ya que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se tiene $ad = bc$, por lo que

$$v(a) + v(d) = v(ad) = v(bc) = v(b) + v(c),$$

y de allí $v(a) - v(b) = v(c) - v(d)$. Las propiedades que definen una valuación se comprueban fácilmente para K, mediante un cálculo directo:

$$v\left(\frac{aa'}{bb'}\right) = v(aa') - v(bb') = \Big(v(a) + v(a')\Big) + \Big(v(b) + v(b')\Big)$$

$$= \Big(v(a) - v(b)\Big) + \Big(v(a') - v(b')\Big) = v\left(\frac{a}{b}\right) v\left(\frac{a'}{b'}\right),$$

$$v\left(\frac{ab' + ba'}{bb'}\right) = v(ab' + ba') - v(bb') \geq \min\Big\{v(ab'), v(ba')\Big\} - v(bb')$$

$$= \min\Big\{v(ab') - v(bb'), v(ba') - v(bb')\Big\} = \min\Big\{v\left(\frac{ab'}{bb'}\right), v\left(\frac{ba'}{bb'}\right)\Big\}$$

$$= \min\Big\{v\left(\frac{a}{b}\right), v\left(\frac{a'}{b'}\right)\Big\}.$$

Nótese que, en un anillo de polinomios, con coeficientes en un cuerpo, la función grado satisface lo siguiente:

1. $\deg(fg) = \deg(f)\deg(g)$,
2. $\deg(f + g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$,

para cualquier par de polinomios f y g. Se sigue que $v(f) = -\deg(f)$ define una valuación en el anillo de polinomios, la que se extiende el cuerpo de cocientes por el mismo procedimiento antes descrito.

Si v es una valuación, definida en un cuerpo K, se define el anillo de valuación asociado a v mediante $\mathcal{O}_v = \{a \in K | v(a) \geq 0\}$. Además se define $\mathcal{M}_v = \{a \in K | v(a) > 0\}$.

Proposición 6.1. *$\mathcal{O}_v$ es un subanillo de K y $\mathcal{M}_v$ es su único ideal maximal. En particular, $\mathcal{O}_v^* = \mathcal{O}_v \backslash \mathcal{M}_v = \{a \in K | v(a) = 0\}$.*

Demostración. Nótese que $1_K^2 = 1_K$, de donde $v(1_k) = 2v(1_k)$, por lo que $v(1_K) = 0$. Del mismo modo, $(-1_K)^2 = 1_K$ implica $v(1_k) = 2v(-1_k)$, co lo que $v(-1_K) = 0$, por lo que $v(-b) = v(b)$ para todo $b \in K$. Sean $a, b \in \mathcal{O}_v$. Se quiere demostrar que $a + b, a - b, ab \in \mathcal{O}_v$. Esto se sigue de las desigualdades siguientes:

$$v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\} \geq \min\{0, 0\} = 0,$$

$$v(a - b) \geq \min\{v(a), v(-b)\} = \min\{v(a), v(b)\} \geq 0,$$

$$v(ab) = v(a) + v(b) \geq 0 + 0 = 0.$$

Igualmente, $a, b \in \mathcal{M}_v$ implica $a + b, a - b \in \mathcal{O}_v$. Si $a \in \mathcal{O}_v$ y $b \in \mathcal{M}_v$, entonces

$$v(ab) = v(a) + v(b) \geq 0 + v(b) = v(b) > 0.$$

Se sigue que $ab \in \mathcal{M}_v$. Esto prueba que $\mathcal{M}_v$ es un ideal. Para ver que es el único ideal maximal, basta probar que $\mathcal{O}_v^* = \mathcal{O}_v \backslash \mathcal{M}_v$. Si $v(a) = 0$, se tiene

$$v(a^{-1}) = v(a^{-1}) + 0 = v(a^{-1}) + v(a) = v(a^{-1}a) = v(1) = 0.$$

Se sigue que $a^{-1} \in \mathcal{O}_v$, por lo que a es invertible. □

En el caso de la valuación p-ádica, el anillo de valuación se denota $D_{(p)}$ y consiste en todas aquellas fracciones $\frac{a}{b}$ en las que $v(a) \geq v(b)$. Si a y b se asumen relativamente primos, entonces p no puede dividir a b, pues en ese caso no dividiría a a, por lo que se tendría $v(a) = 0$ y $v(b) > 0$. Se concluye que $D_{(p)}$ es un anillo de fracciones de D, correspondiente al conjunto de denominadores $S_{(p)} = \{b \in D | v_p(b) = 0\}$. Es importante notar que ningún denominador está en el ideal (p). En particular, el cociente $D_{(p)}/\mathcal{M}_p$, donde

$\mathcal{M}_p$ es su único ideal maximal es un anillo de fracciones del cuerpo $D/(p)$, y por lo tanto coincide con $D/(p)$.

Una valuación v se dice discreta, si su imagen $v(K^*) \subseteq \mathbb{R}$ es un subgrupo discreto. Los subgrupos discretos de $\mathbb{R}$ son de la forma $\mathbb{Z}\alpha = \{n\alpha | n \in \mathbb{Z}\}$, para algún número real α. Esto incluye el caso $\alpha = 0$ que corresponde al subgrupo trivial, y por lo tanto a la valuación trivial. Si α no es cero, puede remplazarse por $-\alpha$ de ser necesario, y asumir que es pósitivo. En este caso puede escogerse un elemento π que satisface $v(\pi) = \alpha$. Tal elemento se denomina un parámetro uniformizante. Para cualquier otro elemento $\lambda \in K^*$, se tiene $v(\lambda) = n\alpha$, de donde $v(\lambda\pi^{-n}) = n\alpha - nv(\pi) = 0$, por lo que $\rho = \lambda\pi^{-n}$ es una unidad del anillo $\mathcal{O}_v$. En particular, un elemento de K^* se escribe de manera única como $\rho\pi^n$ con $n \in \mathbb{Z}$ y $\rho \in \mathcal{O}^*$. En particular, $\mathcal{O}_v$ es un DIP que tiene a los ideales (π^n) como únicos ideales no triviales. Con respecto a este anillo, la valuación v es la valuación π-ádica.

6.2 Valores absolutos

Sea A un anillo. Un valor absoluto en A es una función $\rho : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface

- $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.
- $\rho(xy) = \rho(x)\rho(y)$.
- $\rho(1) = 1$.
- $\rho(0) = 0$.

Proposición 6.2. *Si A es un anillo con un valor absoluto ρ, y si $I_0(A, \rho) = \{a \in A | \rho(a) = 0\}$, entonces $I_0(A, \rho)$ es un ideal propio. Además, el anillo cociente $\tilde{A} = A/I_0(A, \rho)$ tiene un valor absoluto definido por $\tilde{\rho}(\bar{a}) = \rho(a)$ para todo representante a de la clase $\bar{a}$.*

Demostración. De hecho, si $a, b \in I_0(A, \rho)$, de modo que $\rho(a) = \rho(b) = 0$, y si c es un elemento cualquiera de A, se tiene lo que sigue:

$$0 \leq \rho(a + b) \leq \rho(a) + \rho(b) = 0, \qquad \rho(ac) = \rho(a)\rho(c) = 0.$$

Nótese que si c y d son dos elementos en la misma clase residual módulo $I_0(A,\rho)$, necesariamente se tiene que

$$\rho(d) \leq \rho(c) + \rho(d-c) = \rho(c),$$

y por simetría tambien $\rho(c) \leq \rho(d)$. Concluimos que el valor absoluto está bien definido en el cociente $A/I_0(A,\rho)$. □

Remplazando el anillo A por dicho cociente de ser necesario, podemos siempre suponer, sin pérdida de generalidad, que $\rho(x) = 0$ implica $x = 0$. En este caso diremos que el valor absoluto es regular. Por otro lado, un cuerpo no puede tener ideales no triviales, por lo que todo valor absoluto definido en un cuerpo es regular.

Proposición 6.3. *Si un anillo A posee un valor absoluto regular, entonces A no puede tener divisores de* 0. *En particular, si A es conmutativo, entonces es un dominio de integridad.*

Demostración. Si $ab = 0$, se tiene $\rho(a)\rho(b) = 0$, de donde $\rho(a) = 0$, y por consiguiente $a = 0$, o bien $\rho(b) = 0$, y por consiguiente $b = 0$. □

Definiendo $\rho(a/b) = \frac{\rho(a)}{\rho(b)}$ es posible extender un valor absoluto regular, definido en un dominio A, al cuerpo de cocientes K de A. De hecho, el valor absoluto está bien definido en los cocientes, puesto que $a/b = c/d$ es equivalente a $ad = bc$, lo que implica $\rho(a)\rho(d) = \rho(ad) = \rho(bc) = \rho(b)\rho(c)$, y por lo tanto $\frac{\rho(a)}{\rho(b)} = \frac{\rho(c)}{\rho(d)}$. Por otro lado, se tienen la identidad

$$\rho\left(\frac{ac}{bd}\right) = \frac{\rho(ac)}{\rho(bd)} = \frac{\rho(a)\rho(c)}{\rho(b)\rho(d)} = \rho\left(\frac{a}{b}\right)\rho\left(\frac{c}{d}\right),$$

y la desigualdad

$$\rho\left(\frac{ad+bc}{bd}\right) = \frac{\rho(ad+bc)}{\rho(bd)} \leq \frac{\rho(a)\rho(d)+\rho(b)\rho(c)}{\rho(b)\rho(d)} = \rho\left(\frac{a}{b}\right) + \rho\left(\frac{c}{d}\right).$$

Se sigue, de toda la discusión anterior, que es suficiente, al menos en el caso conmutativo, estudiar la teoría de valores absolutos sobre cuerpos, que es lo que haremos en lo sucesivo. Si K es un cuerpo y ρ es un valor absoluto en K, diremos que (K,ρ) es un cuerpo con valor absoluto. Diremos simplemente que K es un cuerpo con valor absoluto si ρ es claro del contexto.

Proposición 6.4. *Si A es un anillo con un valor absoluto regular ρ, la distancia $d(x,y) = \rho(x-y)$ es una métrica.*

Demostración. Debe probarse que $d(x,y) = d(y,x)$, que $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$, y la desigualdad triangular $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Todas estas propiedades son consecuencias inmediatas de la definición de valor absoluto regular. □

La topología definida por esta métrica convierte a K en un anillo topológico [1], es decir un anillo en el que la suma y el producto son funciones continuas.

Proposición 6.5. *Si A es un anillo con un valor absoluto regular ρ, la función $x \mapsto \rho(x)$ es continua.*

Demostración. Dado que $\rho(x) = d(x,0)$, esto se deduce de las propiedades de los espacios métricos. Alternativamernte, puede utilizarse la desigualdad $|\rho(x_n) - \rho(x)| \leq \rho(x_n - x)$, la que se obtiene fácilmente de las desigualdades $\rho(x_n) \leq \rho(x) + \rho(x_n - x)$ y $\rho(x) \leq \rho(x_n) + \rho(x - x_n)$. □

Proposición 6.6. *En un cuerpo con valor absoluto, la suma y el producto son funciones continuas. Además, la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en K^*.*

Demostración. Por definición de convergencia en espacios métricos, x_n converge a x si y sólo si $d(x_n, x)$ converge a 0, es decir $\rho(x - x_n)$ converge a 0. Si suponemos que x_n converge a x e y_n converge a y, tenemos

$$0 \leq \rho\Big((x_n + y_n) - (x + y)\Big) \leq \rho(x_n - x) + \rho(y_n - y).$$

Como el lado derecho converge a 0, lo mismo sucede con el término central. La multiplicación es similar, utilizando la desigualdad

$$\rho(x_n y_n - xy) = \rho\Big(y_n(x_n - x) + x(y_n - y)\Big)$$

$$\leq \rho(y_n)\rho(x_n - x) + \rho(x)\rho(y_n - y).$$

Para la última afirmación se utiliza

$$\rho\left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right) = \frac{\rho(x_n - x)}{\rho(x)\rho(x_n)},$$

[1] Ver los apuntes del curso de Grupos Topológicos.

y el hecho de que $\frac{1}{\rho(x_n)}$ converge a $\frac{1}{\rho(x)}$. □

Recuérdese que un espacio métrico se dice completo si toda sucesión de Cauchy en el converge. Cuando el cuerpo K es completo respecto de la métrica $d(x,y) = \rho(x-y)$ diremos que (K,ρ) es un cuerpo con valor absoluto completo. El completado de un cuerpo, o de cualquier otro espacio métrico, se define en términos de sucesiones de Cauchy. Recuérdese que una sucesión de Cauchy es una sucesión $x = (x_n)_n$ que satisface la propiedad siguiente:

> Para todo $\epsilon > 0$ existe un entero $N = N(\epsilon)$ tal que $n, m > N$ implica $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Proposición 6.7. *La función $t \mapsto \rho(t)$, que va de K a $\mathbb{R}$, que lleva sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy. En particular, para cada sucesión de Cauchy $x = (x_n)_n$, el límite $\hat{\rho}(x) = \lim_{x\to\infty} \rho(x_n)$ está bien definido.*

Demostración. Al igual que antes, esto sigue directamente de la desigualdad $|\rho(a) - \rho(b)| \leq \rho(a-b)$. La última afirmación sigue del hecho de que $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo. □

Proposición 6.8. *El conjunto A de sucesiones de Cauchy en K en un anillo con valor absoluto, en el que el ideal $I_0(A,\hat{\rho})$, definido más arriba, coincide con el conjunto de sucesiones que convergen a 0. Además, el cociente $\overline{K} = A/I_0(A,\hat{\rho})$ es un cuerpo que contiene un subcuerpo denso canónicamente isomorfo e isométrico a K.*

Demostración. Primero debemos demostrar que A es un anillo. En particular, necesitamos probar que sumas, productos e inversos aditivos de sucesiones de Cauchy son sucesiones de Cauchy. Los neutros aditivo y multiplicativo no presentan problema, dado que las sucesiones constantes son de Cauchy. Para la suma se utiliza la desigualdad siguiente:

$$\rho\Big((a_n + b_n) - (a_m + b_m)\Big) \leq \rho(a_n - a_m) + \rho(b_n - b_m).$$

Para el producto, se observa que una sucesión de Cauchy es acotada y se usa la desigualdad siguiente:

$$\rho(a_n b_n - a_m b_m) \leq \rho(a_n - a_m)\rho(b_n) + \rho(a_m)\rho(b_n - b_m).$$

Finalmente, para el inverso aditivo, basta observar que $-x = x(-1_A)$.

A continuación, es necesario probar que $\hat{\rho}$ satisface las propiedades que definen un valor absoluto. Es inmediato que $\hat{\rho}(0) = 0$. Las propiedades $\hat{\rho}(x+y) \leq \hat{\rho}(x) + \hat{\rho}(y)$ y $\hat{\rho}(xy) = \hat{\rho}(x)\hat{\rho}(y)$ se obtienen de las propiedades correspondientes para ρ tomando el límite.

Probaremos ahora que $I_0(A, \hat{\rho})$ es el conjunto de sucesiones que convergen a 0. Si x es una sucesión que converge a 0 se tiene $\hat{\rho}(x) = \lim_{x\to\infty} \rho(x_n) = \rho(0_K) = 0_{\mathbb{R}}$. Por otro lado, si $\hat{\rho}(x) = 0$, entonces $\rho(x_n)$ converge a 0 si n tiende infinito. Como $\rho(x_n) = \rho(x_n - 0_K)$, esta es exactamente la definición de la frase "x_n converge a 0_K".

Con lo anterior se ha probado que el cociente $\overline{K} = A/I_0(A, \hat{\rho})$ está bien definido y es un dominio de integridad. Además K puede identificarse con un subanillo de A, identificando cada elemento de K con la correspondiente sucesión constante, con lo que se tiene $\rho(a) = \hat{\rho}(a)$ para cada elemento a de K. En particular, la imagen de este subanillo en $\overline{K}$ es isomorfa e isométrica a K. De aquí obtenemos $\hat{\rho}(x - x_n) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_m - x_n)$, lo que converge a 0 cuando n tiende a infinito, dado que la sucesión es de Cauchy. Se concluye que la imagen de K en $\overline{K}$ es densa. La presencia de inversos en K puede probarse de dos modos:

1. Si $\{b_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy que no converge a 0, puede probarse que $\rho(b_n)$ está acotado inferiormente y por consiguiente
$$\rho\left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_m}\right) = \frac{\rho(b_m - b_n)}{\rho(b_m)\rho(b_n)},$$
de donde se sigue que $\{1/b_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy.

2. Cómo K es un dominio de integridad, el valor absoluto $\hat{\rho}$ se extiende a su cuerpo de cocientes F. Como $\bar{K}$ es el completado de K, debe ser cerrado en F. Suponga ahora que existe un elemento $b \in \overline{K}$, cuyo inverso $1/b$ no está en $\overline{K}$. En este caso, la distancia de 1 al subgrupo cerrado $b\bar{K}$ es positiva, pese a que $b\bar{K}$ contiene a cada término de la sucesión $\left(\frac{b}{b_n}\right)_n$, la que converge a 1, para cualquer sucesión $(b_n)_n$ que converja a b.

□

En todo lo que sigue consideraremo valores absolutos no triviales definidos sobre un cuerpo, por lo que sólo se anulan en 0. Cómo $\rho(1) = \rho(1^2) = \rho(1)^2$

es no nulo, se tiene, necesariamente $\rho(1) = 1$. Del mismo modo se tiene $\rho(-1) = 1$, o más generalmente $\rho(\xi) = 1$ para toda raiz de la unidad ξ. Esta observación se utilizará sin mayor explicación en todo lo que sigue.

Todo cuerpo tiene el valor absoluto trivial definido por $\rho_0(x) = 1$ para $x \neq 0$. Este valor absoluto define la topología discreta, en la que cada par de puntos se encuentra a la misma distancia. Si un valor absoluto ρ en K es no trivial entonces K tiene un elemento x con $\rho(x) < 1$, y por consiguiente $\rho(x^{-1}) > 1$, o a la inversa. En particular, podemos suponer, $\rho(x) < 1$, de modo que $\rho(x^{-n}) = \rho(x^{-1})^n$ diverge a $+\infty$ con n, de donde todo valor absoluto no-trivial es no acotado. Equivalentemente, todo valor absoluto acotado en un cuerpo es trivial en dicho cuerpo.

6.3 Comparación de valores absolutos

Sean ρ_1, ρ_2 dos valores absolutos en K. Diremos que ρ_1 y ρ_2 son equivalentes si definen la misma topología. En otras palabras, dos valores absolutos son eqivalentes cuando las mismas sucesiones convergen a los mismos límites con respecto a cada valor absoluto, en símbolos

$$\lim_{x\to\infty} \rho_1(x_n - x) = 0 \iff \lim_{x\to\infty} \rho_2(x_n - x) = 0.$$

A menudo utilizaremos la notación $x_n \xrightarrow[\rho]{n\to\infty} x$ cuando $\lim_{x\to\infty} \rho(x_n - x) = 0$, y diremos que x_n converge a x con respecto a ρ.

Proposición 6.9. *Los valores absolutos ρ_1 y ρ_2 son equivalentes si y sólo si existe $t \in \mathbb{R}^+$ tal que $\rho_2(x) = \rho_1(x)^t$ para todo $x \in K^*$.*

Demostración. Sea $B_i(0,1)$ la bola abierta de centro $0 = 0_K$ y radio 1 con respecto a la métrica definida por ρ_i. Entonces la propiedad $\rho(x^n) = \rho(x)^n$ implica que

$$B_i(0,1) = \left\{ x \in K \middle| x^n \xrightarrow[\rho_i]{n\to\infty} 0_K \right\}.$$

En particular, si las métricas son equivalentes se tiene $B_1(0,1) = B_2(0,1)$. De aquí se concluyen las equivalencias siguientes

$$\rho_1(x) < \rho_1(y) \iff \rho_1(x/y) < 1 \iff \rho_2(x/y) < 1 \iff \rho_2(x) < \rho_2(y).$$

Por lo tanto $\rho_1(x)^n < \rho_1(y)^m$ si y sólo si $\rho_2(x)^n < \rho_2(y)^m$. Tomando logaritmos se concluye que

$$\frac{\ln[\rho_1(x)]}{\ln[\rho_1(y)]} < \frac{m}{n} \iff \frac{\ln[\rho_2(x)]}{\ln[\rho_2(y)]} < \frac{m}{n}.$$

Como esto se cumple para cada número racional $\frac{m}{n}$, se concluye que $\frac{\ln[\rho_1(x)]}{\ln[\rho_1(y)]} = \frac{\ln[\rho_2(x)]}{\ln[\rho_2(y)]}$, o lo que es lo mismo $\frac{\ln[\rho_2(x)]}{\ln[\rho_1(x)]} = \frac{\ln[\rho_2(y)]}{\ln[\rho_1(y)]}$. En otras palabras, la función $t(x) = \frac{\ln[\rho_2(x)]}{\ln[\rho_1(x)]}$ es una constante $t(x) = t$. Como, por definición, se tiene $\rho_2(x) = \rho_1(x)^t$, esto prueba la necesidad. Como la suficiencia es inmediata, el resultado sigue. □

En general no es cierto que si ρ es un valor absoluto en K entonces ρ^t es un valor absoluto en K. Por ejemplo, el cuadrado del valor absoluto usual no es un valor absoluto en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Sin embargo, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 6.10. *Sea K un cuerpo con valor absoluto ρ. Sea $0 < t < 1$. Entonces ρ^t es un valor absoluto en K.*

Demostración. Basta probar la condición $\rho(a+b)^t \leq \rho(a)^t + \rho(b)^t$, es decir la desigualdad triangular, para la nueva norma. Esto sigue de la desigualdad

$$1 = \frac{\rho(a)}{\rho(a)+\rho(b)} + \frac{\rho(b)}{\rho(a)+\rho(b)} \leq \left(\frac{\rho(a)}{\rho(a)+\rho(b)}\right)^t + \left(\frac{\rho(b)}{\rho(a)+\rho(b)}\right)^t$$

$$= \frac{\rho(a)^t + \rho(b)^t}{(\rho(a)+\rho(b))^t},$$

ya que esta implica $\rho(a+b)^t \leq (\rho(a)+\rho(b))^t \leq \rho(a)^t + \rho(b)^t$. Nótese que hemos usado que $c < c^t$ cuando c es un número real menor a 1. □

Proposición 6.11. *Sean ρ_1 y ρ_2 valores absolutos no triviales y no equivalentes en K. Entonces no existe ninguna contención entre las bolas abiertas correspondientes $B_1(0,1)$ y $B_2(0,1)$.*

Demostración. Como los valores absolutos no son equivalentes, las bolas abiertas $B_1(0,1)$ y $B_2(0,1)$ no pueden ser iguales. Supongamos que $B_1(0,1) \subseteq B_2(0,1)$. Como $B_1(0,1)$ y $B_2(0,1)$ no son iguales, esta contención es extricta, es decir, existe $a \in K$ tal que $\rho_1(a) \geq 1$ pero $\rho_2(a) < 1$. Sea

$b \in K$ tal que $\rho_1(b) < 1$. Entonces se tiene $\rho_1(ba^{-n}) < 1$ para todo entero positivo n. Esto implica, por la contención entre las bolas, que $\rho_2(b)\rho_2(a)^{-n} = \rho_2(ba^{-n}) < 1$ para todo entero positivo n. Esto contradice la desigualdad $\rho_2(a) < 1$. El resultado sigue. □

Una topología τ_1 en un espacio X, se dice estar contenida en una topología τ_2 si todo abierto de τ_1 es un abierto de τ_2. En particular, toda τ_1-vecindad de un punto es también una τ_2-vecindad. En particular, se tiene que toda sucesión que converge a 0 respecto de la topología τ_2 es también convergente a 0 con respecto a la topología τ_1. Se concluye, de la caracterización de la bola abierta $B(0,1)$ como el conjunto de elementos cuyas potencias tienden a 0, que no existe ninguna contención entre las topologías definidas por dos valores absolutos no equivalentes. En este sentido, se dice que las topologías definidas por estos valores absolutos no son comparables.

Lema 6.12. *Sean ρ_1, ρ_2 dos valores absolutos no equivalentes y no triviales en K. Entonces existen elementos a_1, a_2 en K tales que $\rho_1(a_1), \rho_2(a_2) > 1$ pero $\rho_1(a_2), \rho_2(a_1) < 1$.*

Demostración. Se sigue de la proposición anterior que existen elementos b_1, b_2 en K tales que $\rho_1(b_1), \rho_2(b_2) \geq 1$ pero $\rho_1(b_2), \rho_2(b_1) < 1$. Definimos $a_1 = b_1/b_2$ y $a_2 = b_2/b_1$. □

Lema 6.13. *Dados n valores absolutos $\rho_1, \ldots, \rho_n$ en K, no equivalentes a pares y ninguno trivial, existen elementos $a_1, \ldots, a_n$ en K tales que $\rho_i(a_i) > 1$ pero $\rho_i(a_j) < 1$ si $i \neq j$.*

Demostración. Basta probar que existe a_1. Ultilizaremos inducción en n. El caso $n = 2$ es, literalmente, el lema anterior. Tomemos $n+1$ valores absolutos $\rho_1, \ldots, \rho_{n+1}$ en K y sea c en K tal que $\rho_1(c) > 1$ pero $\rho_i(c) < 1$ si $2 \leq j \leq n$. Sea b tal que $\rho_{n+1}(b) < 1$, pero $\rho_1(b) > 1$. Consideremos el elemento $c_m = \frac{c^m}{c^m+1}$. Para cualquier valor absoluto dado ρ, se tiene lo siguiente:

- Si $\rho(c) < 1$, se tiene $c_m \xrightarrow[\rho]{m\to\infty} 0_K$.
- Si $\rho(c) > 1$, se tiene $c_m \xrightarrow[\rho]{m\to\infty} 1_K$.

En particular, se tiene que $c_m \xrightarrow[\rho_i]{m\to\infty} 0_K$ si $2 \leq i \leq n$. A continuación, la demostración se divide en tres casos, según el valor de $\rho_{n+1}(c)$:

- Si $\rho_{n+1}(c) < 1$ tomamos $a_1 = c$. Este elemento cumple lo pedido por hipótesis.

- Si $\rho_{n+1}(c) > 1$, se tienen las condiciones $bc_m \xrightarrow[\rho_i]{m\to\infty} b$ si $i \in \{1, n+1\}$, mientras que $bc_m \xrightarrow[\rho_i]{m\to\infty} 0_K$ si $2 \leq i \leq n$. En este caso tomamos $a_1 = bc_m$ con m suficientemente grande, de modo que $\rho_i(a_1)$ esté al mismo lado del 1 que su valor límite en cada caso. Nótese que el valor absoluto de b sólo es relevante en los casos donde $i \in \{1, n+1\}$, que son precisamente aquellos donde tenemos control sobre el.

- Si $\rho_{n+1}(c) = 1$ tomamos $a_1 = bc^m$ con m suficientemente grande. Nótese que el valor absoluto $\rho_i(bc_m)$ converge a 0 salvo si i es 1 o $n+1$. En el primer caso, el límite es infinito. En el último caso, se tiene $\rho_{n+1}(bc_m) = \rho_{n+1}(b) < 1$.

El resultado sigue en cada caso. □

Los Elementos c_m utilizados en la demostración precedente juegan el papel de los elementos idempotentes del teorema chino de los restos. Esta es una conexión profunda que explotaremos más adelante. Una aplicación importante es el siguiente resultado:

Proposición 6.14. ***(Teorema de Aproximación debil).*** *Dados n valores absolutos $\rho_1, \ldots, \rho_n$ en K, dados n elementos $c_1, \ldots, c_n$ en K, y dado $\epsilon > 0$ arbitrario, existe $b \in K$ tal que tales que $\rho_i(b - c_i) < \epsilon$ para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Demostración. Sean $a_1, \ldots, a_n$ como en la proposición anterior, y considere el elemento siguiente:

$$b_m = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i a_i^m}{1 + a_i^m}.$$

Un cálculo directo demuestra que b_m converge a c_i con respecto al valor absoluto ρ_i, para $i = 1, \ldots, n$. Basta, por lo tanto, tomar $b = b_m$ para m suficientemente grande. □

El teorema de aproximación débil nos dice que n elementos arbitrarios de K pueden aproximarse simultaneamente, tanto como se quiera, por un único elemento $b \in K$. Este teorema tiene la siguiente consecuencia topológica:

Corolario 6.14.1. *Dados n valores absolutos $\rho_1, \ldots, \rho_n$ en K, sea K_i el completado de cuerpo K con respecto a la topología definida por ρ_i. En este caso, la diagonal $\Delta = \{(a, \ldots, a) | a \in K\}$ es densa en el espacio producto $K_1 \times \cdots \times K_n$.* □

6.4 Valores absolutos y valuaciones

Nuestro próximo objetivo es describir los valores absolutos del cuerpo $\mathbb{Q}$, pero antes, damos un ejemplo que será crucial en todo lo que sigue. Es el valor absoluto que deriva de una valuación.

Si v es una valuación en un cuerpo K, y si $c < 1$ es un número real positivo, entonces $\rho_v(x) = c^{v(x)}$ es un valor absoluto. De hecho, se tienen las propiedades siguientes:

$$\rho_v(xy) = c^{v(xy)} = c^{v(x)+v(y)} = c^{v(x)}c^{v(y)} = \rho_v(x)\rho_v(y),$$

$$\begin{aligned}\rho_v(x+y) = c^{v(x+y)} &\leq c^{\min\{v(x),v(y)\}} = \max\{c^{v(x)}, c^{v(y)}\} \\ &= \max\{\rho_v(x), \rho_v(y)\} \leq \rho_v(x) + \rho_v(y).\end{aligned}$$

Al comprobar la desigualdad triangular se utiliza que $r < s$ es equivalente a $c^s < c^r$. En este cálculo se demuestra una forma más fuerte de la desigualdad triangular, la llamada desigualdad untramétrica. En general, un espacio métrico (X, d) se dice ultramétrico si satisface la desigualdad $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$ para cada trio de puntos (x, y, z). Para un valor absoluto ρ, esto se escribe $\rho(x + y) \leq \max\{\rho(x), \rho(y)\}$.

Si K es el cuerpo de cocientes de un DIP D, y si $v = v_p$ es la valuación p-ádica para algún primo p, el valor absoluto ρ_v definido arriba recibe el nombre de valor absoluto p-ádico, y se denota por $x \mapsto |x|_p$. En el caso $D = \mathbb{Z}$ suele escogerse la constante $c = \frac{1}{p}$. En otras palabras, $|n|_p = p^{-t}$ si $n = p^t n_0$ donde p no divide a n_0.

En todo cuerpo 1_K existe un menor subanillo con uno que tiene como elementos a todas las sumas de la forma $1_K + 1_k + \cdots + 1_K$, incluyendo a la suma vacía 0_K, y a sus inversos. Llamaremos a este anillo $\mathbb{Z}_K$. Es fácil ver que este anillo es la imagen de un homomorfismo $\psi : \mathbb{Z} \to K$, y por lo tanto es homeomorfo a $\mathbb{Z}$ o a un cociente $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Lo primero ocurre si el cuerpo tiene característica 0 y lo segundo cuando tiene característica positiva. En el último caso $n = p$ es la característica. En lo que sigue, diremos que un valor absoluto es no-arquimediano si es acotado en $\mathbb{Z}_K$. Esto

es inmediato si K tiene característica positiva, dado que $\mathbb{Z}_K$ es finito en ese caso. También es inmediato que el valor absoluto definido por una valuación es no-arquimediano.

Proposición 6.15. *Si ρ es un valor absoluto no-arquimediano en un cuerpo K, entonces $\rho(n_K) \leq 1$ para todo elemento $n_k \in \mathbb{Z}_K$.*

Demostración. Si $\rho(n) > 1$ para algún entero n, se tiene $\rho(n^t) = \rho(n)^t \to \infty$ cuando $t \to \infty$, lo que contradice el hecho de que ρ es acotado en $\mathbb{Z}_K$. Concluimos que $\rho(n_K) \leq 1$ para todo elemento $n_K \in \mathbb{Z}_K$. □

Proposición 6.16. *Todo valor absoluto no arquimediano satisface la desigualdad ultramétrica.*

Demostración. Sea ρ un valor absoluto no arquimediano en un cuerpo K, y sean $x, y \in K$. Sea $M = \max\{\rho(x), \rho(y)\}$. El teorema del binomio nos dice que

$$\rho(x+y)^n = \rho\Big((x+y)^n\Big) = \rho\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \rho\Big(\tbinom{n}{k}\Big)\rho(x)^k\rho(y)^{n-k} \leq (n+1)M^n,$$

dado que el simbolo combinatorio puede considerarse como un elemento de $\mathbb{Z}_K$, y por lo tanto su valor absoluto está acotado por 1. Extrayendo la raiz n-ésima se obtiene la desigualdad $\rho(x+y) \leq \sqrt[n]{n+1}M$ y, tomando $n \to \infty$, se obtiene lo pedido. □

Proposición 6.17. *Todo valor absoluto no arquimediano proviene de una valuación.*

Demostración. Sea ρ un valor absoluto no arquimediano en un cuerpo K. Sea $c < 1$, y sea $v(x) = \frac{\ln\big(\rho(x)\big)}{\ln(c)}$, para cada elemento no nulo $x \in K$, de modo que se tenga $\rho(x) = c^{v(x)}$. Basta probar que v es una valuación. De la identidad

$$c^{v(xy)} = \rho(xy) = \rho(x)\rho(y) = c^{v(x)}c^{v(y)}$$

se tiene $v(xy) = v(x) + v(y)$, y de la desigualdad

$$c^{v(x+y)} = \rho(x+y) \leq \max\{\rho(x), \rho(y)\} = \max\{c^{v(x)}, c^{v(y)}\} = c^{\min\{v(x), v(y)\}}$$

se obtiene que $v(x+y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$. El resultado sigue. □

Proposición 6.18. ***(Principio de dominancia).*** *Sea K un cuerpo provisto de un valor absoluto no-arquimediano ρ. Si $\rho(x) > \rho(y)$, con $x, y \in K$, entonces $\rho(x+y) = \rho(x)$.*

Demostración. Basta ver que $\rho(x+y) \leq \max\{\rho(x), \rho(y)\} = \rho(x)$, y que, si la desigualdad fuese estricta, se tendría

$$\rho(x) = \rho\Big((x+y)+(-y)\Big) \leq \max\{\rho(x+y), \rho(-y)\}$$

$$= \max\{\rho(x+y), \rho(-y)\} < \rho(x).$$

□

Proposición 6.19. *Sea K un cuerpo provisto de un valor absoluto no-arquimediano ρ. Si x_n converge a $x \neq 0$ con respecto a ese valor absoluto, entonces $\rho(x_n) = \rho(x)$ para todo n suficientemente grande.*

Demostración. Basta tomar n que satisface $\rho(x - x_n) < \rho(x)$, lo que es posible si $\rho(x) > 0$ por definición de convergencia. □

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de lo anterior.

Proposición 6.20. *Sea K un cuerpo provisto de un valor absoluto no-arquimediano ρ, y sea $\overline{K}$ su completado. Entonces ρ toma el mismo conjunto de valores en K y $\overline{K}$.* □

6.5 Valores absolutos en el cuerpo $\mathbb{Q}$

Para aplicaciones posteriores, necesitamos conocer los valores absolutos en el cuerpo $\mathbb{Q}$ de números racionales. Utilizaremos la clasificación mencionada en la sección anterior. Un valor absoluto se dice no-arquimediano si es acotado en la imagen $\mathbb{Z}_K$ de $\mathbb{Z}$. En caso contrario se dice arquimediano. Nótese que, cuando $K = \mathbb{Q}$, se tiene simplemente $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}$.

Proposición 6.21. *Todo valor absoluto arquimediano en $\mathbb{Q}$ es equivalente al valor absoluto usual.*

Demostración. Sea ρ un valor absoluto arquimediano en $\mathbb{Q}$. Sean m y n enteros positivos, con $n > 1$. Escribamos m en base n, es decir

$$m = a_r n^r + \ldots + a_1 n + a_0, \tag{6.1}$$

donde se tiene $0 \leq a_i \leq n-1$ y $a_r \neq 0$. Consideremos la constante $M = \max\{\rho(a_i) | 1 \leq i \leq n-1\}$. Supongamos primero que $\rho(n) \leq 1$. Entonces, de la identidad (6.1), se tiene que $\rho(m) \leq rM$. Además, la desigualdad $n^r \leq m < n^{r+1}$, que también se deduce de (6.1), implica a su vez con $r\ln(n) \leq \ln(m) < (r+1)\ln(n)$. De aquí concluímos que $\rho(m) \leq M\frac{\ln(m)}{\ln(n)}$. Remplazando m por m^q, para a continuación tomar la raiz q-ésima, se obtienen las desigualdades siguientes:

$$\rho(m)^q \leq \frac{Mq\ln(m)}{\ln(n)}, \qquad \rho(m) \leq \sqrt[q]{\frac{Mq\ln(m)}{\ln(n)}}.$$

Tomando $q \to \infty$, se obtiene $\rho(m) \leq 1$, lo que contradice el hecho de que el valor absoluto es no-arquimediano. De este modo, debemos concluir que $\rho(n) > 1$ para todo $n > 1$.

Volviendo ahora a la expresión (6.1), utilizando el hecho de que $\rho(n)^s < \rho(n)^r$ para $s < r$, se obtiene que $\rho(m) \leq rM\rho(n)^r$. Tomando logaritmos, podemos escribir

$$\ln\Big(\rho(m)\Big) \leq r\ln\Big(\rho(n)\Big) + \Big(\ln(M) + \ln(r)\Big).$$

Dividiendo ambos lados por $\ln\Big(\rho(n)\Big)$, se tiene

$$\frac{\ln\Big(\rho(m)\Big)}{\ln\Big(\rho(n)\Big)} \leq r + \frac{\ln(M)+\ln(r)}{\ln\Big(\rho(n)\Big)}.$$

Como la expresión en el lado derecho es creciente como función de r, podemos utilizar nuevamente la desigualdad $r\ln(n) \leq \ln(m)$, y obtenemos:

$$\frac{\ln\Big(\rho(m)\Big)}{\ln\Big(\rho(n)\Big)} \leq \frac{\ln(m)}{\ln(n)} + \frac{\ln(M) + \ln\Big(\frac{\ln(m)}{\ln(n)}\Big)}{\ln\Big(\rho(n)\Big)}.$$

Remplazando m por m^q, se tiene

$$\frac{q\ln\Big(\rho(m)\Big)}{\ln\Big(\rho(n)\Big)} \leq \frac{q\ln(m)}{\ln(n)} + \frac{\ln(M) + \ln\left(\frac{q\ln(m)}{\ln(n)}\right)}{\ln\Big(\rho(n)\Big)}.$$

Dividiendo por q y tomando el límite cuando q tiende a infinito se tiene

$$\frac{\ln\Big(\rho(m)\Big)}{\ln\Big(\rho(n)\Big)} \leq \frac{\ln(m)}{\ln(n)}.$$

Por simetría, se tiene la igualdad, es decir

$$\frac{\ln\Big(\rho(m)\Big)}{\ln\Big(\rho(n)\Big)} = \frac{\ln(m)}{\ln(n)}.$$

Esta identidad es válida para cada entero positivo m por lo que $\ln(\rho(m)) = t\ln(m)$, donde $t = \ln(\rho(n))/\ln(n)$ es independiente de m. Se sigue que $\rho(m) = m^t$ para todo entero positivo m. Como $\rho(-1)^2 = \rho(1)$, se tiene también $\rho(-m) = -m^t = |m|^t$. En particular, ρ es equivalente al valor absoluto usual. □

Nótese que como ρ es un valor absoluto, necesariamente debe tenerse, a posteriori, que $0 < t \leq 1$, dado que $2^t = \rho(2) \leq \rho(1) + \rho(1) = 1 + 1 = 2$.

Proposición 6.22. *Todo valor absoluto no trivial y no arquimediano en $\mathbb{Q}$ es equivalente al valor absoluto p-ádico para algún entero primo p.*

Demostración. Sea ρ tal valor absoluto. Como se probó en la sección anterior, se tiene $\rho(n) \leq 1$ para todo entero n. Supongamos que un entero dado n tiene una descomposición única en primos

$$n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_n^{\alpha_n},$$

entonces podemos calcular su valor absoluto mediante

$$\rho(n) = \rho(q_1)^{\alpha_1}\rho(q_2)^{\alpha_2} \cdots \rho(q_n)^{\alpha_n}, \tag{6.2}$$

a condición de que conozcamos el valor absoluto $\rho(p)$ de cada primo. Si hay dos primos p_1 y p_2 tales que $\rho(p_1), \rho(p_2) < 1$, podemos encontrar enteros r y s tales que $p_1 r + p_2 s = 1$ y por lo tanto

$$1 = \rho(1) = \rho(p_1 r + p_2 s) \leq \max\{\rho(p_1), \rho(p_2)\} < 1.$$

Debemos por lo tanto concluir que existe a lo mas un primo q que satisfaga la desigualdad $\rho(q) < 1$. Se sigue de (6.2) que, si todos los primos tienen un valor absoluto igual a 1, el valor absoluto ρ es trivial en $\mathbb{Z}$. Se sigue de la fórmula

$$\rho\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\rho(a)}{\rho(b)},$$

que ρ es trivial en $\mathbb{Q}$, lo que contradice la hipótesis de que no lo es.

Supongamos ahora que existe un único q tal que $\rho(q) < 1$. Definamos $t = -\ln(\rho(q))/\ln(q)$. Se sigue que, si n tiene una descomposición única en primos

$$n = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_n^{\alpha_n},$$

con $q = q_1$, entonces $\rho(n) = \rho(q)^{\alpha_1} = q^{-t\alpha_1} = |n|_q^t$. El resultado sigue. □

Sumarizamos lo demostrado hasta aquí en el siguiente resultado:

Proposición 6.23. ***(Teorema de Ostrowski).*** *Todo valor absoluto no trivial y en $\mathbb{Q}$ es equivalente al valor absoluto usual o al valor absoluto p-ádico para algún entero primo p.* □

Un resultado importante, aunque elemental, sobre los valores absolutos p-ádicos es el siguiente:

Proposición 6.24. *Sea r un número racional no nulo fijo. El valor absoluto $|r|_p$ es 1 para casi todo primo p (es decir para todo primo salvo un número finito).*

Demostración. Si $r = \frac{n}{m}$, es suficiente escoger p de modo que no divida a n ni a m. Casi todo primo satisface esta condición. □

Nuestro próximo objetivo es una versión más fuerte del Teorema de Aproximación Débil que se llama, por tal razón, el Teorema de Aproximación Fuerte. Antes de enunciar esta propiedad en detalle, reinterpretaremos el Teorema Chino de los restos en términos de valores absolutos.

Proposición 6.25. *Dados n valores absolutos no-arquimedianos $\rho_1, \ldots, \rho_n$ en $\mathbb{Q}$, dados n enteros $m_1, \ldots, m_n$ en $\mathbb{Z}$, y dado $\epsilon > 0$ arbitrario, existe $b \in \mathbb{Z}$ tal que tales que $\rho_i(b - m_i) < \epsilon$ para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que ρ_i es el valor absoluto p_i-ádico $x \mapsto |x|_{p_i}$. Para cada primo p_i, escogemos un entero positivo α_i tal que $p^{-\alpha_i} < \epsilon$. Ahora escogemos una solución b del sistema de congruencias simultaneas:

$$x \equiv m_i \pmod{p_i^{\alpha_i}}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

la que existe por el Teorema Chino de los Restos. Ahora observamos que $\rho_i(b - m_i) \leq \rho_i(p_i^{\alpha_i}) = p_i^{-\alpha_i} < \epsilon$. El resultado sigue. □

Proposición 6.26. *Dados n valores absolutos no arquimedianos $\rho_1, \ldots, \rho_n$ en $\mathbb{Q}$, no equivalentes a pares y ninguno trivial, dados n elementos $c_1, \ldots, c_n$ en $\mathbb{Q}$, y dado $\epsilon > 0$ arbitrario, existe $b \in \mathbb{Q}$ que satisface:*

- $\rho_i(b - c_i) < \epsilon$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$,
- $\rho(b) \leq 1$ *para todo valor absoluto no arquimediano distinto de* $\rho_1, \ldots, \rho_n$.

Demostración. Escribimos cada c_i como un cociente $c_i = r_i/s_i$ de enteros. Sea $s = s_1 s_2 \cdots s_n$, de modo que cada sc_i es un entero. Por el lema precedente, podemos escoger un entero x que cumpla las siguientes condiciones:

- $\rho_i(sc_i - x) < \epsilon \rho_i(s)$,
- $\rho(x) \leq \rho(s)$, si $\rho(s) < 1$ y $\rho \notin \{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$.

Nótese que si $\rho(s) = 1$, entonces $\rho(x) \leq \rho(s)$, dado que x es un entero. Se concluye que, si $b = x/s$, entonces $\rho(b) \leq 1$ para cada valor absoluto no arquimediano distinto de $\rho_1, \ldots, \rho_n$, mientras que $\rho_i(c_i - b) < \epsilon$ para $i = 1, \ldots, n$. □

La proposición que precede es, de hecho, el caso más usado del Teorema de Aproximación Fuerte, pero incluimos aquí la versión completa por completitud:

Proposición 6.27. ***(Teorema de aproximación fuerte en $\mathbb{Q}$).*** *Considere n valores absolutos $\rho_1, \ldots, \rho_n$ en $\mathbb{Q}$, no equivalentes a pares y ninguno trivial, y considere un valor absoluto ρ_∞ que no es equivalente a ninguno de lo anteriores. Dados n elementos $c_1, \ldots, c_n$ en $\mathbb{Q}$, y dado $\epsilon > 0$ arbitrario, existe $b \in \mathbb{Q}$ que satisface:*

- $\rho_i(b - c_i) < \epsilon$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$,
- $\rho(b) \leq 1$ *para todo valor absoluto no equivalente a ninguno de los valores absolutos* $\rho_1, \ldots, \rho_n$ *ni a* ρ_∞.

Demostración. Si ρ_∞ es el valor absoluto usual, el problema se reduce a la proposición precedente, por lo que suponemos que este no es el caso. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que ρ_1 es el valor absoluto usual, poniendo $c_1 = 0$ y asumiendo $\epsilon < 1$, si el valor absoluto usual no fuese ninguno de los originales. Igual que antes, escogemos s tal que sc_i es un entero para cada i. Como antes, podemos suponer que ρ_i es el valor absoluto p_i-ádico, para $2 \leq i \leq n$. Para cada uno de tales primos p_i, escogemos un entero positivo α_i tal que $p^{-\alpha_i} < \epsilon\rho_i(s)$. Nótese que si $N = p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$, entonces $u \equiv t \pmod{N}$ implica $\rho_i(u - t) \leq \epsilon\rho_i(s)$ para $2 \leq i \leq n$.

Sea ahora, p_∞ el primo para el cual ρ_∞ es el valor infinito p_∞-ádico. Sea α_∞ tal que $p_\infty^{\alpha_\infty} \equiv 1 \pmod{N}$. Sea x un entero que satisface las condiciones siguientes:

- $sc_i \equiv x \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, si $2 \leq i \leq n$.
- $\rho(x) \leq \rho(s)$, si $\rho(s) < 1$ y $\rho \notin \{\rho_1, \ldots, \rho_n, \rho_\infty\}$.

La primera hipótesis equivale a una condición de congruencia módulo N y la segunda nos dice que x es divisible por un divisor apropiado de s. Se sigue que podemos asumir que $x \leq sN$. Nótese que la condición $\rho(x) \leq \rho(s)$ se cumple automaticamente en el caso $\rho(s) = 1$, dado que x es un entero.

Escogemos k tal que $p_\infty^{-k\alpha_\infty} < \epsilon$, y ecogemos un entero m que satisfaga la condición $mNs \leq p_\infty^{(k+1)\alpha_\infty} sc_1 < (m+1)Ns$. Entonces se tiene

$$\left| sc_1 - \frac{mNs + x}{p_\infty^{(k+1)\alpha_\infty}} \right| < \left| \frac{Ns}{p_\infty^{(k+1)\alpha_\infty}} \right| < \epsilon \left| \frac{Ns}{p_\infty^{\alpha_\infty}} \right| \leq \epsilon|s|.$$

Definimos, por lo tanto, $b = \frac{mNs+x}{sp_\infty^{(k+1)\alpha_\infty}}$. La condición en ρ_1 es inmediata del cálculo precedente. Si $2 \leq i \leq n$ se tiene que sb es congruente a x, y por lo tanto también a sc_i, módulo $p_i^{\alpha_i}$, en el anillo localizado $\mathbb{Z}[1/p_\infty]$. Se concluye que $\rho_i(sc_i - sb) < \epsilon\rho_i(s)$.

Para cualquier otro valor absoluto ρ que no es equivalente a ninguno de los valores absolutos $\rho_1, \ldots, \rho_n$ ni a ρ_∞ se tiene $\rho(p_\infty) = 1$, luego $\rho(sb) \leq \max\{\rho(Ns), \rho(x)\} \leq \rho(s)$. El resultado sigue. □

En Teoría de números, una clase de equivalencia de valores absolutos suele denominarse un lugar. Los resultados precedentes muestran que es posible imponer, a un racional b, condiciones del tipo $\rho(b-c) < \epsilon$ en una cantidad finita de lugares y condiciones del tipo $\rho(b) < 1$ en los restantes lugares, salvo uno. Este "lugar excepcional", es completamente necesario, como lo demuestra el siguiente resultado, el que se deja como ejercicio para el lector:

Proposición 6.28. ***(Fórmula del producto, caso racional).*** *Si $\Pi(\mathbb{Q})$ es el conjunto de valores absolutos p-ádicos y el valor absoluto usual, se tiene $\prod_{\rho\in\Pi(\mathbb{Q})} \rho(q) = 1$ para todo número racional q.* □

6.6 Números p-ádicos

En esta sección estudiaremos el completado $\mathbb{Q}_p$ de $\mathbb{Q}$ con respecto a la métrica p-ádica. Se sigue de la teoría general desarrollada en el capítulo 9 que $\mathbb{Q}_p$ es un cuerpo de característica 0, ya que contiene a $\mathbb{Q}$. Además, la valuación p-ádica se extiende por continuidad a todo $\mathbb{Q}_p$, por lo que $(\mathbb{Q}_p, |\bullet|_p)$ es un cuerpo con valor absoluto.

La clausura en $\mathbb{Q}_p$ del anillo $\mathbb{Z}$ de enteros será denotada $\mathbb{Z}_p$. Un elemento de $\mathbb{Z}_p$ es el límite de alguna sucesión de elementos enteros. Nótese que dos enteros n_1 y n_2 satisfacen $|n_1 - n_2|_p < \epsilon$ si y sólo si $n_1 \equiv n_2 \pmod{p^r}$ para algún r que satisfaga $p^{-r} < \epsilon$. Se sigue que una sucesión $\{m_i\}_i$ de enteros es de cauchy si y sólo si se satisface la condición siguiente:

$$\forall R \geq 0 \left(\exists N > 0 \text{ such that } \left(i, j > n \Rightarrow m_i \equiv m_j \pmod{p^R} \right) \right).$$

Recuérdese que cada entero positivo m puede escribirse en *base* p, es decir en la forma $m = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_k p^k$, donde cada cifra a_i es un entero entre 0 y $p-1$. Nótese que dos enteros son congruentes módulo R si sus expansiones p-ádicas coinciden hasta la cifra correspondiente a p^{R-1}. Se sigue que un elemento de $\mathbb{Z}_p$ puede pensarse como una expansión infinita en base p, es decir

$$z = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_k p^k + \cdots, \qquad 0 \leq a_i \leq p-1.$$

El lector cuidadoso notará que en la discusión anterior se han dejado de lado los números negativos. Esto no es grave dado que -1, y por lo tanto

cualquier entero negativo, puede escribirse como el límite de una sucesión de enteros no negativos. De hecho:

$$-1 = \lim_{n\to\infty} p^n - 1 = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \cdots.$$

La última identidad en lo que precede proviene de la igualdad $p^n - 1 = (p-1)(1 + p + \cdots + p^{n-1})$. Tambíen puede obtenerse de la fórmula para sumar una serie geométrica, ya que:

$$(p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \cdots = (p-1)\sum_{i=0}^{\infty} p^i = \frac{p-1}{1-p} = -1.$$

De forma similar pueden establecerse las relaciones:

$$1 + p + p^2 + \cdots = \frac{1}{1-p}, \qquad 1 - p + p^2 + \cdots + (-1)^i p^i + \cdots = \frac{1}{1+p},$$

de las que se sigue, en particular, que $(1+p)$ y $(1-p)$ son unidades en el anillo $\mathbb{Z}_p$. De hecho, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 6.29. *Un entero $n \in \mathbb{Z}$ es una unidad en $\mathbb{Z}_p$ si y sólo si p no divide a n.*

Demostración. Si p no divide a n, entonces $n + p^R\mathbb{Z}$ es una unidad en $\mathbb{Z}/p^R\mathbb{Z}$ para todo entero positivo R. Sea m_R un inverso de n módulo p^R. Entonces $m_R \equiv m_S \pmod{p^R}$ si $S > R$. Se concluye que la sucesión $\{m_R\}_R$ es de Cauchy, y por lo tanto converge a un éntero p-ádico m. Como por definición $nm_R \equiv 1 \pmod{p^R}$, se sigue por paso al límite que $nm = 1$, y por lo tanto m es el inverso multiplicativo de n. Por otro lado, si p divide a n, entonces $|n|_p < 1$, por lo que para cualquier entero p-ádico m se tiene $|nm|_p < |m|_p \leq 1$, por lo que n no puede ser invertible. □

En particular, se sigue de lo anterior que si n no es divisible por p, entonces $1/n$ es un entero p-ádico. El siguiente resultado sigue fácilmente de lo que precede:

Corolario 6.29.1. $\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \middle| m \notin p\mathbb{Z} \right\}$.

De hecho, es posible dar una caracterización mas precisa de los enteros p-ádicos.

Proposición 6.30. $\mathbb{Z}_p = \left\{ z \in \mathbb{Q}_p \middle| |z|_p \leq 1 \right\}$.

Demostración. Si n es un entero, sabemos ya que su valor absoluto está acotado por 1, por lo que la necesidad sigue por continuidad. Por otro lado, si $z \in \mathbb{Q}_p$ satisface $|z|_p \leq 1$, podemos escribirlo como límite de una sucesión $\{r_i\}$ de números racionales. Por continuidad, debemos tener que $|r_i|_p < p$ para cada i suficientemente grande, y por lo tanto $|r_i|_p \leq 1$, puesto que le valuación p-ádica es una potencia entera de p, es decir un elemento de $p^{\mathbb{Z}}$. Se sigue que cada r_i, para i suficientemente grande, es un elemento de $\mathbb{Z}_p$, y por lo tanto también z, ya que $\mathbb{Z}_p$ es cerrado. □

Dado que el valor absoluto p-ádico es acotado en $\mathbb{Z}$, es un valor absoluto no arquimediano, que satisface la desigualdad $|z_1 + z_2|_p \leq \max\{|z_1|_p, |z_2|_p\}$ para cada par de elementos z_1 y z_2 en $\mathbb{Q}_p$. En particular, proviene de una valuación $v = v_p$, llamada la valuación p-ádica en $\mathbb{Q}_p$, mla que extiende la valuación p-ádica en $\mathbb{Q}$, de la que ya hemos hablado. El anillo de enteros de esta valuación es $\mathcal{O}_v = \mathbb{Z}_p$. Además, es una valuación discreta, y p es un parámetro uniformizante. Se sigue que el ideal maximal de $\mathbb{Z}_p$ es $p\mathbb{Z}_p$.

Proposición 6.31. *El cuerpo cociente $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

Como $p\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$, se tiene que $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ contiene un subanillo isomorfo al cuerpo de cocientes $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Como $\mathbb{Z}$ es denso en $\mathbb{Z}_p$, se tiene que para cada elemento $z \in \mathbb{Z}_p$ hay un entero $n \in \mathbb{Z}$ tal que $|z - n|_p < 1$. Esto significa que $z - n \in p\mathbb{Z}_p$ por lo que se tiene la igualdad, es decir $\mathbb{Z}_p/M_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

En teoría de números, se utiliza el término *cuerpo local* para referirse a un cuerpo similar a $\mathbb{Q}_p$ (o $\mathbb{R}$), mientras que se refiere a $\mathbb{Q}$ como el *cuerpo global* correspondiente. Una definición precisa de cuerpos locales y globales será dada más adelante. Una propiedad que se cumple en $\mathbb{Q}_p$ se refiere como una propiedad local, mientras que una propiedad que se cumple en $\mathbb{Q}$ se refiere como una propiedad global. Cuando se tiene un resultado que indica que alguna propiedad se cumple globalmente si y sólo si se cumple localmente, tal resultado se conoce como un *principio local-global*. Un primer ejemplo de un principio local-global es el siguiente:

Proposición 6.32. *Sea $r \in \mathbb{Q}$. Entonces $r \in \mathbb{Z}$ si y sólo si $r \in \mathbb{Z}_p$ para cada primo p.*

Demostración. Es claro que $r \in \mathbb{Z}$ implica $r \in \mathbb{Z}_p$ para cada primo p. Sea $r = m/n$ con m y n relativamente primos. Para cada primo p que divide a n se tiene $|m/n|_p > 1$, y por lo tanto $r \notin \mathbb{Z}_p$. El resultado sigue. □

Corolario 6.32.1. *Sea $r \in \mathbb{Q}$. Entonces $r \in \mathbb{Z}_p^*$ para cada primo p si y sólo si $r \in \mathbb{Z}^*$, es decir $r = \pm 1$.* □

Terminaremos esta sección dando una representación visual de los cuerpos p-ádicos que suele ser bastante útil para la intuición. Por simplicidad asumimos en las ilustraciones que $p = 2$, pero todo lo que sigue se aplica a un cuerpo p-ádico cualquiera. Para visualizar el anillo $\mathbb{Z}_p$ se procede como sigue: Se dibuja un grafo con vértices a la misma altura para cada clase residual módulo p^n, para cada entero $n \geq 0$, de modo que las clases que corresponden a un mismo valor de n estén a la misma altura, y los que corresponden a valores mayores de n a menor altura. A continuación se une, por una arista, cada clase residual $a + p^{n+1}\mathbb{Z}$ con la corespondiente clase $a + p^n\mathbb{Z}$. La Figura 6.1 ilustra los tres niveles más altos de este proceso. Cada vértice

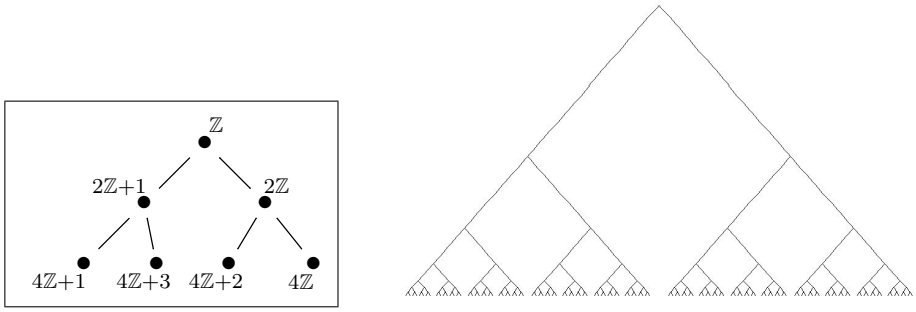


Figure 6.1: A la izquierda, la segunda etapa en la construcción del anillo 2-ádico $\mathbb{Z}_2$. A la derecha, una etapa más avanzada de la construcción del mismo anillo.

tiene siempre un vecino en el nivel inmediatamente superior y p en el nivel inmediatamente inferior. Este proceso se itera hasta el infinito. Cada posible camino descendente en este grafo corresponde a una sucesión de clases residuales $B_n = a_n + p^n\mathbb{Z}$ con $a_{n+1} \in B_n$, por lo que la sucesión $\{a_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Z}_p$, y tiene por consiguente un límite en $\mathbb{Z}_p$. Por otro lado, si tomamos una segunda sucesión $\{a'_n\}_n$ del mismo tipo, correspondiendo a un camino diferente, tendremos que a_n no es congruente a a'_n módulo p^m para todo $n \geq m$, si los caminos divergen en el m-ésimo nivel. Se concluye que cada camino corresponde a un número p-ádico distinto. Finalmente, para cada número p-ádico z existe una sucesión de números enteros a_n tal que z

es congruente a a_n módulo p^n, por lo que corresponde a un camino del tipo descrito. En teoría de grafos, se dice que los puntos del anillo $\mathbb{Z}_p$ están en correspondencia con los elementos del límite visual del grafo.

La construcción del parrafo anterior debe verse como un análogo al proceso de construcción del conjunto de números reales interpretando a los números racionales como puntos en una recta, y a los irracionales como agujeros en dicha recta. Es fácil ver, a partir de esta construcción, que el conjunto $\mathbb{Z}_p$ es no numerable. De hecho, en el caso $p = 2$ ilustrado en la Figura 6.1, puede establecerse una correspondencia entre $\mathbb{Z}_2$ y el conjunto de sucesiones de 0's y 1s, el que se sabe no numerable debido al argumento diagonal de Cantor.

Dados dos números p-ádicos a y b, podemos definir su distancia $d(a, b)$ en términos de la altura a la cual se separan los correspondientes caminos verticales. Para ser precisos, nótese que dos caminos verticales parten siempre del mismo punto inicial, el vértice que corresponde al anillo completo de enteros $\mathbb{Z}_p$, de modo que cada par de caminos tiene un último vértice común, correspondiente a una clase de congruencia del tipo $m + p^n\mathbb{Z}$. Esto ocurre precisamente cuando la distancia entre los enteros p-ádicos correspondientes es p^{-n}. Esto se ilustra en la Figura 6.2.A. Esta idea puede usarse para

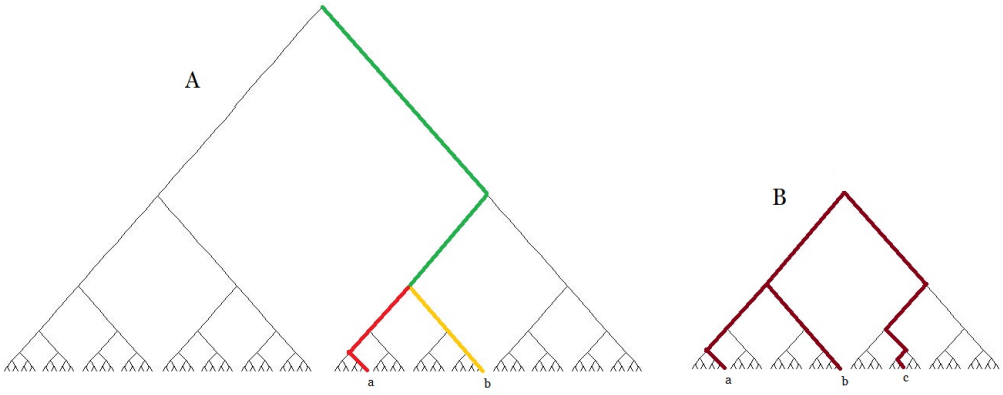


Figure 6.2: En **A**, Dos p-ádicos a distancia 1/4. En verde la parte común a ambos caminos verticales. En **B** se muestra un "triángulo". Nótense los dos lados mayores que van de a a c y de b a c.

ilustrar el hecho de que todo triángulo es isóceles. La Figura 6.2.B muestra un triángulo p-ádico.

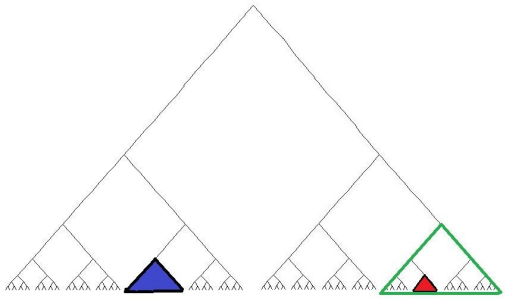


Figure 6.3: Algunas bolas del anillo p-ádico.

Una bola cerrada del tipo $B_z^{[r]} = \left\{ a \in \mathbb{Z}_p \middle| \, |a - z|_p \leq p^{-r} \right\}$ es simplemente una clase de congruencia $z + p^r\mathbb{Z}$. Podemos visualizarla en el dibujo como un cono cuyo vértice corresponde a la clase de congruencia dada. Sus elementos corresponden a los límites visuales de caminos que entran al cono. Esta situación se ilustra en la Figura 6.3. Por ejemplo, el contorno verde corresponde a una bola que contiene como subconjunto a la bola representada por el cono rojo. El lector puede convencerse, jugando un rato con estos dibujos, que si dos bolas se intersectan, entonces una de ellas está contenida dentro de la otra. Esto es una propiedad importante de las ultramétricas. Dejamos al lector la tarea de dar una demostración formal de este hecho.

Esta construcción puede extendense a todo el cuerpo $\mathbb{Q}_p$, expandiendo el árbol hacia arriba. En la Figura 6.4, el vértice correspondiente al anillo $\mathbb{Z}_p = B_0^{[0]}$ aparece en una rama menor. Los vérces por debajo de esa rama corresponden al grafo ya descrito. Por encima se observan nuevas ramas que parecen imitar la construcción ya hecha. Una manera simple de conseguir esto es observar que la bola cerrada $p^{-t}\mathbb{Z}_p = B_0^{[-t]}$ es una copia, en una escala mayor, de la bola $B_0^{[0]}$. Podemos entonces definir el grafo correspondiente a esta bola, precisamente, como una copia a escala del grafo anterior, identificando cada bola del tipo $p^{-r}B$ con el cono que se encuentra en la posición correspondiente a B en el grafo antiguo. El árbol de Bruhat-Tits. o BTT, se obtiene pegando, mediante la identificación natural, todos estos grafos ampliados. Con esta convención, los vértices por encima de $\mathbb{Z}_p$ corresponden a bolas de $\mathbb{Q}_p$ que contienen propiamente al anillo de enteros. Por ejemplo, los conjuntos $\frac{1}{2}\mathbb{Z}_2$, $\frac{1}{4}\mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_2 + \frac{1}{2}$ corresponden a los vértices marcados en la Figura 6.4. Por ejemplo, el punto rojo de la Figura 6.4 corresponde al número $6 + \frac{1}{4}$, mientras que el punto verde corresponde a $13 + \frac{1}{2}$.

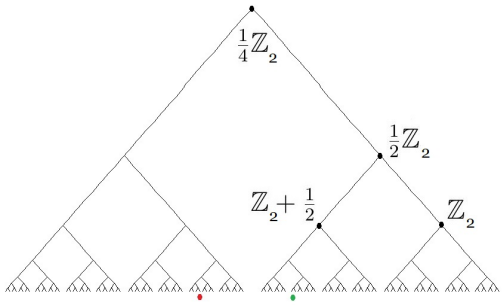


Figure 6.4: El árbol ampliado, mostrando los vértices que corresponden a $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $\frac{1}{4}\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$.

Al ampliar el árbol de esta forma hasta el infinito, se obtiene un camino ascendente cuyo extremo se identifica con el infinito de la recta proyetiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$. Veremos más adelante que este punto al infinito juega un papel importante en muchas aplicaciones.

6.7 Series de potencias en cuerpos completos

Gran parte del análisis real puede generalizarse a cuerpos completos arbitrarios. Un ejemplo importante de esto es la teoría de series infinitas, particularmente series de potencia. Para cada cuerpo con valor absoluto (K, ρ), una serie en K, o más precisamente una serie de términos en K, es una suma formal del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ se dice convergente si la sucesión de sumas parciales $\{s_N\}_{N\in\mathbb{N}}$, where $s_N = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n$, converge a algún límite en K. Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ se dice absolutamente convergente si $\sum_{n=0}^{\infty} \rho(\alpha_n)$ es convergente. Un resultado del análisis que se generaliza directamente es el que sigue:

Proposición 6.33. *Toda serie absolutamente convergente es de Cauchy.*

Demostración. Basta observar que para $M > N$ se tiene

$$\rho\left(\sum_{n=0}^{N} \alpha_n - \sum_{n=0}^{M} \alpha_n\right) \leq \rho\left(\sum_{n=N+1}^{M} \alpha_n\right) \leq \sum_{n=N+1}^{M} \rho(\alpha_n),$$

y la suma de la izquierda tiende a 0 cuando M y N tienden a infinito, ya que $\sum_{n=0}^{\infty} \rho(\alpha_n)$ es convergente por definición. □

Corolario 6.33.1. *En un cuerpo con valor absoluto completo, toda serie absolutamente convergente es convergente.* □

En todo lo que sigue supondremos que K es un cuerpo completo. Una serie formal de potencias en K es una expresi ón del tipo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$, donde x es una variable, es decir un simbolo que no pertence a K. Recuerdese que las series de potencia forman un anillo cuyas unidades son las unidades de K. Diremos que la serie de potencias $f(x)$ está definida en un elemento $a \in K$, o que $f(a)$ está definida, si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a^n$ es convergente, y su suma es por definición el valor $f(a)$ de la serie $f(x)$ en el elemento a. El conjunto de las series de potencias definidas en un elemento a es un subanillo, y la evaluación $f(x) \mapsto f(a)$ es un homeomorfismo de anillos. De hecho, se tiene el siguiente resultado:

Lema 6.34. *Si las series de potencia $f(x)$ y $g(x)$ convergen absolutamente en a, entonces lo mismo es cierto para las series de potencia $h(x) = f(x)g(x)$, $l(x) = f(x)+g(x)$, y $u(x) = f(x)-g(x)$. Además la evaluación respeta todas estas operaciones, es decir, se tiene las siguientes relaciones:*

$$h(a) = f(a)g(a), \qquad l(a) = f(a) + g(a), \qquad u(a) = f(a) - g(a).$$

Demostración. Usaremos la notación $f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n x^n$. Entonces decir que la serie $f(x)$ es convergente en a es equivalente a decir que la sucesión $\{f_N(a)\}_N$ converge, y el tal caso, el límite es $f(a)$. Del mismo modo, si $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n$, entonces $g(a)$ es el límite de las sumas parciales $g_N(a)$, donde $g_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \beta_n x^n$.

Para ver que las series de potencias que corresponden a la suma y resta son absolutamente convergentes, se procede como sigue:

$$\sum_{n=0}^{N} \rho(\alpha_n x^n \pm \beta_n x^n) \leq \sum_{n=0}^{N} \rho(\alpha_n x^n) + \sum_{n=0}^{N} \rho(\beta_n x^n)$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \rho(\alpha_n x^n) + \sum_{n=0}^{\infty} \rho(\beta_n x^n).$$

Esto muestra que la serie es absolutamente convergente. Es fácil ver que $u_N(a) = f_N(a)+g_N(a)$ es la suma parcial de la seriesuma $u(x)$. Además $f_N(a)$ converge a $f(a)$ y $g_N(a)$ converge a $g(a)$. Se sigue que $u_N(a) = f_N(a)+g_N(a)$

converge a $f(a)+g(a)$. Se concluye que la suma $u(a)$ es igual a $f(a)+g(a)$. El argumento para la resta es el mismo.

La serie de potencias producto se escribe $h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n x^n$, donde $\gamma_n=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\beta_{n-k}$. Con esto en mente, acotamos las sumas parciales como sigue:

$$\sum_{n=o}^{N}\rho(\gamma_n x^n)=\sum_{n=0}^{N}\rho\left(\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k x^k)(\beta_{n-k}x^{n-k})\right)$$

$$\leq\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n}\rho(\alpha_k x^k)\rho(\beta_{n-k}x^{n-k})\right)\leq\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho(\alpha_n x^n)\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho(\beta_n x^n)\right).$$

En el último paso se utiliza el hecho de que al desarrollar el producto de la izquerda aparecen, entre otros, todos los términos del lado izquierdo (la sumatoria doble de la linea inferior). Esto nos entrega la convergencia absoluta. Además se concluye como arriba que $f_N(a)g_N(a)$ converge a $f(a)g(a)$. El problema es que $f_N(a)g_N(a)$ no coincide con la suma parcial $h_N(a)$. De hecho

$$f_N(a)g_N(a)-h_N(a)=\sum_{\substack{0\leq n,m\leq N\\ n+m>N}}\alpha_m\beta_n a^{m+n}.$$

Nótese que en cada término de la suma de la izquierda se tiene $n\geq\frac{N}{2}$ o bien $m\geq\frac{N}{2}$. Esto nos permite escribir la siguiente desigualdad:

$$\rho\Big(f_N(a)g_N(a)-h_N(a)\Big)\leq\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho(\alpha_n x^n)\right)\cdot\left(\sum_{n=[N/2]}^{\infty}\rho(\beta_n x^n)\right)+$$

$$\left(\sum_{n=[N/2]}^{\infty}\rho(\alpha_n x^n)\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho(\beta_n x^n)\right),$$

y observar que la suma de la izquierda converge a 0. El resultado sigue. □

Si $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n$ es una serie de potencias en K, su radio de convergencia r se define mediante $r^{-1}=\overline{\lim}_{n\to\infty}\rho(\alpha_n)^{\frac{1}{n}}$. El límite superior que aparece en esta definición es un límite en $\mathbb{R}$, y está definido en casi cualquier libro de cálculo[2]. Con esta definición se tiene el resultado siguiente:

[2]De hecho, el límite superior no está definido en un cuerpo con valor absoluto, a menos que se trate de un cuerpo ordenado.

Proposición 6.35. *Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$ una serie de potencias con radio de convergencia r. Entonces, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *$f(a)$ está definida para todo $a \in K$ tal que $\rho(a) < r$.*
2. *$f(a)$ no está definida para ningún $a \in K$ tal que $\rho(a) > r$.*

Demostración. La desigualdad

$$\rho\left(\sum_{n=M}^{N} \alpha_n a^n\right) \leq \sum_{n=M}^{N} \Big(\rho(\alpha_n)^{1/n}\rho(a)\Big)^n,$$

prueba que los términos de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \rho(\alpha_n a^n)$ están eventualmente acotados por los de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho(a)}{r}\right)^n$, la que es absolutamente convergente cuando $\rho(a) < r$. Esto prueba la primera afirmación. Para la segunda, observamos que el término general de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \rho(\alpha_n a^n)$ no tiende a 0 si $\rho(a) > r$. □

En particular, se tiene el siguiente resultado:

Corolario 6.35.1. *Las series de potencia con radio de convergencia al menos r forman un subanillo $K[[x]]_r$ del anillo $K[[x]]$ de series de potencia con coeficientes en K.* □

Nótese que incluso si una serie de potencias tiene coeficientes en $\mathbb{Q}$, sus radios de convergencia en $\mathbb{R}$ o en los distintos completados p-ádicos $\mathbb{Q}_p$ pueden ser muy distintos. Por ejemplo se demuestra en cualquier libro de cálculo que el radio de convergencia en $\mathbb{R}$ de la serie exponencial

$$e(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

es ∞. Sin embargo, si se observa que $\left|\left|\frac{1}{n!}\right|\right|_p \geq 1$, para todo entero positivo n y todo primo p, se concluye que el radio de convergencia de la exponencial en $\mathbb{Q}_p$ está acotado por 1.

Otro ejemplo está dado por la serie

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots + \binom{1/2}{n} x^n + \cdots.$$

Esta tiene radio de convergencia 1 en cada cuerpo $\mathbb{Q}_p$, con $p > 2$, como uno podría esperar. Nótese sin embargo que $|3|_3 = \frac{1}{3}$, por lo que $\sqrt{1+3}$

está definido. Su valor debe ser ciertamente una raiz de 4. Sin embargo, un cálculo cuidadoso prueba que si

$$u = \sqrt{1+3} = 1 + \frac{3}{2} - \frac{3^2}{8} + \frac{3^3}{16} + \cdots,$$

se tiene $|u-1|_3 < 1$ y por lo tanto u no puede ser 2, sino -2.

6.8 Ejercicios

1. Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n!$ converge en $\mathbb{Z}_p$ para todo primo p.
2. Se define el logaritmo p-ádico mediante la serie $\log_p(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$, considerada como una serie con coeficientes en $\mathbb{Q}_p$.
   - Probar que esta serie converge si $|x|_p < 1$.
   - Probar que $\log_p(a) + \log_p(b) = \log_p(ab)$.
   - Probar que si η es una raiz de la unidad en $\mathbb{Q}_p$ con $|\eta - 1|_p < 1$, entonces $\log_p(\eta) = 0$.
   - sean r_n y s_n enteros tales que
     $$\frac{r_n}{s_n} = -2 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{2^n}{n}.$$
     Probar que existe un entero N tal que, si $n > N$, entonces r_n es divisible por 4096.
   - Defina la función exponencial p-ádica por la serie usual y demuestre que es la inversa del logaritmo en una vecindad de 1. Calcule su radio de convergencia.
   - Si se define $4^{1/2}$ en $\mathbb{Q}_3$ como la exponencial de $\frac{1}{2}\log_3(1+3)$, calcule su valor.
3. Probar que si una función $\rho : K \to [0, \infty]$, definida en un cuerpo K, satisface las tres condiciones siguientes:
   (a) $\rho(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.
   (b) $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$.
   (c) $\rho(u) \leq 1$ implica $\rho(1+u) \leq 1$.

Entonces ρ es un valor absoluto y satisface la desigualdad triangular fuerte

$$\rho(a+b) \leq \max\{\rho(a), \rho(b)\}.$$

4. Probar que si ρ es un valor absoluto en un cuerpo K, entonces para todo x en K se tiene $\rho(-x) = \rho(x)$.

5. Determine cuales de las siguientes sucesiones convergen en la norma p-ádica indicada, y calcule el límite, si este es el caso.

   (a) $a_n = 2^n$ con $p = 2$.
   (b) $a_n = 2^{-n}$ con $p = 2$.
   (c) $a_n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$ con $p = 2$.
   (d) $a_n = 1 + 4^n$ con $p = 2$.
   (e) $a_n = 4^n$ con $p = 3$.

6. Determine cuales de las siguientes series convergen en el cuerpo $\mathbb{Q}_p$ con el valor indicado de p.

   (a) $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n + \cdots$ con $p = 2$.
   (b) $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n + \cdots$ con $p = 3$.
   (c) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ con $p = 2$.
   (d) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ con $p = 3$.
   (e) $\sum_{k=0}^{\infty} p^k \binom{1/2}{k}$ con $p \neq 2$.
   (f) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \binom{1/2}{k}$ con $p = 2$.

7. Probar que K es un cuerpo con un valor absoluto ρ que satisface la desigualdad triangular fuerte, y si definimos

$$B(a; r) = \{x \in K | \rho(x - a) < r\},$$

   entonces para cada punto $b \in B(a; r)$ se tiene $B(a; r) = B(b; r)$.

8. Probar que si un valor absoluto ρ en $\mathbb{Q}$ satisface $\rho(n) > 1$ para algún entero n, entonces ρ es una potencia del valor absoluto usual.

9. Sea un cuerpo K que contiene a $\mathbb{Q}_p$ y que es completo con respecto a un valor absoluto ρ que extiende el de $\mathbb{Q}_p$. Probar que la serie

$$\log_p(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$$

converge para cada x en $B(0;1)$. Probar que si $x \in B(0;p^{-1/(p-1)})$ entonces $\rho[\log_p(1+x)] = \rho(x)$.

10. Sean K y ρ como en elproblema precedente. Probar que la serie

$$\exp_p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

converge para cada x en $B(0;p^{-1/(p-1)})$.

11. Sea Π el conjunto de todos los primos en $\mathbb{Z}$, junto con el símbolo ∞, y sea $x \mapsto ||x||_\infty$ el valor absoluto usual en $\mathbb{R}$. Probar que para todo número racional r se tiene

$$\prod_{v\in\Pi} ||r||_v = 1.$$

12. Probar que toda sucesión en $\mathbb{Z}_p$ tiene una subsucesión convergente.

13. Determine para que valores de $x \in \mathbb{Q}_3$ se cumple que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k!)^2}$$

converge. Justifique.

14. Demuestre que la suma

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/3}{k} 7^k$$

converge en $\mathbb{Q}_7$ a una raiz cúbica de 8 que no es 2. Concluya que $\mathbb{Q}_7$ contiene raices cúbicas no triviales de la unidad.

15. Sea ρ un valor absoluto no arquimediano definido en el cuerpo $\mathbb{Q}(i)$. Sean π_1 y π_2 dos primos distintos en $\mathbb{Z}[i]$. Probar que $\rho(\pi_1)$ y $\rho(\pi_2)$ no pueden ser menores que 1 simultaneamente.

16. Probar que, para cada primo p, la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log_p(1+p^n)$$

es convergente, donde $\log_p(1+x)$ se define como en el Ejercicio 9.

17. Sea p un primo mayor que 2. Probar que $\sum_{n=1}^{\infty}[\exp_p(p^n)-1]$ es convergente.

Chapter 7

Extensión de valores absolutos

En este capítulo desarrollaremos las herramientas básicas que nos permitirán, en capítulos subsiguientes, trabajar con una familia precisa de valores absolutos sobre cualquier extensión finita del cuerpo números racionales, o más generalmente sobre los llamados cuerpos globales.

7.1 Espacios vectoriales normados y extensiones algebraicas

En lo que sigue, denotamos por K, o más precisamente por (K, ρ), un cuerpo local arbitrario, y denotamos por V un espacio vectorial sobre K. Escribamos $V_{\neq 0} = \left\{ \vec{x} \in V | \ \vec{x} \neq \vec{0}_V \right\}$. Una norma en V es una función $N : V_{\neq 0} \to \mathbb{R}^+$ que satisface las condiciones siguientes:

1. $N\left(\vec{x} + \vec{y}\right) \leq N\left(\vec{x}\right) + N\left(\vec{y}\right)$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in V_{\neq 0}$.
2. $N\left(\lambda \vec{x}\right) = \rho(\lambda) N\left(\vec{x}\right)$ para todo $\vec{x} \in V_{\neq 0}$, $\lambda \in K$.

Por convención, se fija la norma del neutro aditivo por la fórmula $N\left(\vec{0}_V\right) = 0_{\mathbb{R}}$. Tal como en el caso de valores absolutos, diremos que dos normas son equivalentes si definen la misma topología en V.

Proposición 7.1. *Dos normas N y N_0 en V son equivalentes si y sólo si existen constantes M y R que satisfacen las desigualdades*

$$M N_0\left(\vec{x}\right) \leq N\left(\vec{x}\right) \leq R N_0\left(\vec{x}\right)$$

para cada vector $\vec{x} \in V$.

Demostración. Si tales constantes existen, y si $\vec{x}_n$ converge a $\vec{x}$ con respecto a la norma N_0, de modo que $N_0\left(\vec{x} - \vec{x}_n\right)$ converge a 0, la hipótesis sobre las constantes demuestra que $N\left(\vec{x} - \vec{x}_n\right)$ también converge a 0, por lo que $\vec{x}_n$ converge a $\vec{x}$ con respecto a N. La conversa es similar.

Tomemos ahora un elemento $b \in K$ tal que $\rho(b) < 1$. Para todo $\vec{x} \in V$, existe un entero m tal que $1 < N(b^m\ \vec{x}) \leq \rho(b)^{-1}$. Si existe una sucesión $\left\{\vec{x}_n\right\}_n$, para la cual $\frac{N_0\left(\vec{x}_n\right)}{N\left(\vec{x}_n\right)}$ tiende a 0, podemos asumir, remplazando $\vec{x}_n$ por un escalar de ser necesario, que $1 < N_0(\vec{x}_n) \leq \rho(b)^{-1}$, de donde $N(\vec{x}_n)$ converge a 0. Esto demuestra que ambas normas definen topologías diferentes. Lo mismo sucede si existe una sucesión $\left\{\vec{x}_n\right\}_n$, para la cual $\frac{N_0\left(\vec{x}_n\right)}{N\left(\vec{x}_n\right)}$ tiende a infinito. □

Proposición 7.2. *Si dos normas N y N_0 en V son equivalentes, entonces V es completo respecto de N_0 si y sólo si es completo respecto de N.*

Demostración. El resultado precedente muestra que dos normas equivalentes tienen las mismas sucesiones de Cauchy y, por definición, tienen también las mismas sucesiones convergentes. □

Proposición 7.3. *Sea K un cuerpo con valor absoluto completo. Si V tiene dimensión finita sobre K entonces dos normas cualesquiera en V son equivalentes. En particular, V es completo con respecto a cualquier norma.*

Demostración. Usaremos inducción en n. El caso $n = 1$ es trivial, ya que, si $V = K\ \vec{v}$, entonces se tiene $N\left(a\ \vec{v}\right) = \rho(a)N\left(\vec{v}\right)$ para cada $a \in K$, por lo que N es, en la práctica, un múltiplo del valor absoluto ρ. Supondremos, por lo tanto que $n > 1$.

Sea $B = \left\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\right\}$ una base de V sobre K. Definimos una norma N_0 mediante la fórmula $N_0\left(\vec{x}\right) = \max_{i=1}^{n} \rho(\alpha_i)$, para todo elemento $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ \vec{v}_i \in V$. Dejamos al lector la tarea de comprobar que N_0, así definido,

es una norma. Para cualquier otra norma N se tiene

$$N\left(\vec{x}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \rho(\alpha_i) N\left(\vec{v}_1\right) \leq N_0\left(\vec{x}\right) \sum_{i=1}^{n} N\left(\vec{v}_i\right).$$

Sea V_i el subespacio generado por $\left\{\vec{v}_j \,\middle|\, 1 \leq j \leq n,\ j \neq i\right\}$. Como V_i es completo respecto de N, por hipótesis de inducción, es cerrado en V, y se tiene que $C = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\vec{v}_i + V_i\right) \subset V$ es cerrado. Nótese que los elementos de C son, precisamente, los elementos de V con una B-coordenada igual a 1. En particular, el complemento de C es abierto y contiene al 0. Se sigue que existe $\epsilon > 0$ tal que si $N\left(\vec{x}\right) < \epsilon$ entonces $\vec{x} \notin C$. Por otro lado, si $\vec{x} = \sum_i x_i\ \vec{v}_i$ con algún $\rho(x_i) > 1$, se tiene que $\frac{\vec{x}}{x_i} \in C$, por lo que $N\left(\vec{x}\right) > N\left(\frac{\vec{x}}{x_i}\right) > \epsilon$. Se concluye que $N\left(\vec{x}\right) < \epsilon$ implica $\rho(x_i) < 1$, para cada $i = 1, \ldots, n$, y por lo tanto $N_0\left(\vec{x}\right) < 1$.

Tomemos ahora un elemento $b \in K$ tal que $\rho(b) < 1$. Afirmamos que se tiene

$$N_0\left(\vec{v}\right) \leq \frac{1}{\epsilon \rho(b)} N\left(\vec{v}\right), \qquad \forall\ \vec{v} \in V.$$

Esto termina la demostración. Sea $\vec{v}$ un elemento arbitrario de V. Entonces podemos encontrar un entero positivo M que satisface la desigualdad $1 < N_0\left(b^M\ \vec{v}\right) \leq \rho(b)^{-1}$. El hecho de que $N_0\left(b^M\ \vec{v}\right)$ es mayor a 1 muestra que $N\left(b^M\ \vec{v}\right) > \epsilon$, por lo que precede. Esto nos permite escribir las desigualdades

$$N\left(\vec{v}\right) = \rho(b)^{-M} N\left(b^M\ \vec{v}\right) > \rho(b)^{-M} \epsilon \geq \rho(b)^{-M+1} \epsilon N_0\left(b^M\ \vec{v}\right)$$

$$= \rho(b) \epsilon N_0\left(\vec{v}\right).$$

Esto concluye la prueba. □

Corolario 7.3.1. *Si K es un cuerpo con valor absoluto ρ completo y F/K es una extensión finita. Entonces existe a lo más una extensión de ρ a F.*

Demostración. Se sigue de lo anterior que dos extenciones cualesquiera del valor absoluto son equivalentes, luego por la proposición 6.9, uno de ellos es una potencia del otro. Como coinciden en el cuerpo K, esta potencia debe ser trivial. □

Corolario 7.3.2. *Sea F/K una extensión finita, y sea ρ un valor absoluto en F. Entonces la extensión $\bar{F}/\bar{K}$ de los completados es finita y se tiene:*

1. $\bar{F} = F\bar{K}$.
2. $[\bar{F} : \bar{K}] \leq [F : K]$.

Demostración. $F\bar{K}$ es un espacio de dimensión finita sobre $\bar{K}$, luego es completo, y contiene a F. De aquí sigue (1). La afirmación (2) se deduce de (1), ya que la propiedad $[FE : E] \leq [F : K]$ es válida para cualquier extensión finita F/K y cualquier extensión arbitraria E/K. □

Nuestro próximo objetivo es probar que la extensión F siempre tiene un valor absoluto que extiende el valor absoluto de K. Más precisamente, se demostrará el siguiente resultado:

> Sea (K, ρ) un cuerpo con valor absoluto completo. Sea F/K una extensión finita. Entonces la función $\rho' : F \to \mathbb{R}$, definida por $\rho'(\alpha) = \rho\Big(N_{F/K}(\alpha)\Big)^{1/[F:K]}$, es un valor absoluto.

Cómo un valor absoluto es no arquimediano cuando es acotado en $\mathbb{Z}_K$, se sigue que, si E/K una extensión de cuerpos arbitraria, y si ρ es un valor absoluto en E, entonces ρ es un valor absoluto arquimediano si y sólo si su restricción a K lo es. Por esta razón, el resultado precedente puede ser probado caso a caso, lo que haremos en las dos secciones siguientes.

7.2 El caso arquimediano

Ejemplos de cuerpos arquimedianos completos son $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. En esta sección veremos que estos ejemplos son esencialmente los únicos. El siguiente resultado es inmediato de la definición:

Lema 7.4. *Todo cuerpo arquimediano tiene característica* 0. □

Se sigue de lo anterior que un cuerpo arquimediano contiene al cuerpo $\mathbb{Q}$ de números raciones. Se sigue, de la clasificación de los valores absolutos en $\mathbb{Q}$, que la restricción del valor absoluto ρ, de K, a $\mathbb{Q}$ es equivalente al valor absoluto usual. En particular, la clausura de $\mathbb{Q}$ en K es un completado de $\mathbb{Q}$ con respecto al valor absoluto usual, y es por lo tanto isométrico a $\mathbb{R}$. Podemos, por lo tanto, suponer siempre que K contiene al cuerpo $\mathbb{R}$, y que la restricción del valor absoluto a $\mathbb{R}$ tiene la forma $\rho(r) = |r|^t$, con $t > 0$. Además, como $\rho(2) \leq \rho(1) + \rho(1) = 2$, necesariamente se tiene $t \leq 1$.

Lema 7.5. *Si K es un cuerpo completo arquimediano, y si $\rho(a) < 1$, entonces $1 + a$ es un cuadrado en F.*

Demostración. Como el cuerpo K tiene caracteristica 0, la serie de potencias $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} x^k$ está definida. Ella satisface la identidad $f(x)^2 = 1 + x$ en el anillo $\mathbb{Q}[[x]]$ de series de potencias racionales, y por lo tanto tambien en $K[[x]]$. Como esta serie tiene radio de convergencia 1 en $\mathbb{R}$ con el valor absoluto usual, su radio de convergencia en K es $1^t = 1$, dado el radio de convergencia depende sólo de los valores absolutos de los coeficientes de la serie. Evaluando en un elemento $a \in K$ con $\rho(a) < 1$, se obtiene $f(a)^2 = 1 + a$, dado que la evaluación es un homomorfismo. □

Lema 7.6. *Si K es un cuerpo completo arquimediano, y si $E = K(\sqrt{-1})$, entonces ρ se extiende a un valor absoluto ρ' en E mediante*

$$\rho'(\alpha) = \sqrt{\rho[N_{E/F}(\alpha)]}.$$

Demostración. Es inmediato que $\rho'(xy) = \rho'(x)\rho'(y)$ y por lo tanto $\rho'(x + y) = \rho'(x)\rho'(1 + y/x)$. Basta, por lo tanto, probar que

$$\rho'(1 + \alpha) \leq 1 + \rho'(\alpha), \qquad \forall \alpha \in K.$$

Si el polinomio minimal de α sobre K es $f(x) = x^2 + bx + c$, entonces su discriminante $b^2 - 4c$ no es un cuadrado. El polinomio minimal de $1 + \alpha$ es

$$m(x) = f(x - 1) = x^2 + (b - 2)x + (c - b + 1).$$

Por lo tanto, basta probar que $\sqrt{\rho(1 - b + c)} \leq 1 + \sqrt{\rho(c)}$. Como $b^2 - 4c$ no es un cuadrado, tampoco lo es $1 - \frac{4c}{b^2}$, de donde $\rho(4c) \geq \rho(b^2)$, por el lema precedente. Como $\rho(4) < 4$ se tiene $4\rho(c) \geq \rho(b^2)$. De aquí

$$\sqrt{\rho(1 - b + c)} \leq \sqrt{1 + \rho(b) + \rho(c)} \leq \sqrt{1 + 2\sqrt{\rho(c)} + \rho(c)} \leq 1 + \sqrt{\rho(c)}.$$

Esto termina la prueba. □

Proposición 7.7. *Todo cuerpo arquimediano completo es isométrico a* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*.*

Demostración. Sea K un cuerpo con un valor absoluto ρ que satisface las hipótesis del lema. Podemos suponer, como antes, que K contiene a $\mathbb{R}$. En particular, para cierta constante positiva fija $t \leq 1$, el valor absoluto ρ satisface $\rho(a) = a^t$ para todo número real positivo a. Por el lema precedente, podemos asumir que -1 es un cuadrado en K. Sea i una raiz de -1 en K e identifiquemos a $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}(i)$. Basta probar que $K = \mathbb{C}$.

Como $\mathbb{C}$ es completo, es cerrado en K. Sea $\alpha \in K - \mathbb{C}$. Entonces la distancia $d_\rho(\alpha, \mathbb{C})$ es positiva. Multiplicando por un real si es necesario, podemos suponer que $d_\rho(\alpha, \mathbb{C}) = 2$. Como distancia $d_\rho(\alpha, z) = \rho(\alpha - z)$ tiende a ∞ cuando z tiende a ∞, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\rho(\alpha - z_0) = 2$. Sumando a α un elemento de $\mathbb{C}$ de ser necesario, podemos suponer que $z_0 = 0$. Entonces

$$2^n \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) = \rho(\alpha)^n + 1 \geq \rho(\alpha^n - 1) = \prod_{t=1}^{n} \rho(\alpha - e^{2\pi t i/n}) \geq \rho(\alpha - 1)2^{n-1}.$$

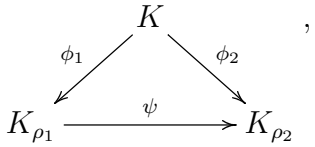
Tomando $n \to \infty$ se tiene que $\rho(\alpha - 1) = \rho(\alpha) = 2$. Esto nos dice que $\alpha - 1$ satisface las mismas hipótesis que α, por lo que puede obtenerse $\rho(\alpha - m) = \rho(\alpha) = 2$ para todo entero positivo m. Sin embargo, para $m > 4^{1/t}$ se obtiene $\rho(\alpha - m) \geq \rho(m) - \rho(\alpha) > 4 - 2 = 2$. El resultado sigue por contradicción. □

Corolario 7.7.1. *Todo cuerpo con una valuación arquimediana es isométrico a un subcuerpo de* $\mathbb{C}$*.* □

Observese que el único automorfismo isométrico (es decir que preserva la norma) de $\mathbb{R}$ es la identidad, mientras que existen dos automorfismos isométricos de $\mathbb{C}$. En particular, se tiene el siguiente resultado:

Corolario 7.7.2. *Para toda extensión* K *de* $\mathbb{Q}$ *existe una correspondencia uno a uno entre los valores absolutos reales, es decir con completado real, y las incrustaciones de* K *en* $\mathbb{R}$*. Del mismo modo, existe una correspondencia uno a dos entre los valores absolutos complejos, es decir con completado complejo, y las incrustaciones de* K *en* $\mathbb{C}$ *con imagen densa.*

Demostración. Cada Valor absoluto ρ en K define una incrustación $\phi : K \to \bar{K}_\rho$ de K en el completado correspondiente $\bar{K}_\rho$, que es isomorfo a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Del mismo modo, cada incrustación $\phi : K \to \mathbb{C}$ define un único valor absoluto $\rho_\phi(a) = |\phi(a)|$. Si dos incrustaciones ϕ_1 y ϕ_2 definen valores absolutos equivalentes ρ_1 y ρ_2 se tiene un diagrama conmutativo



,

donde ψ es un isomorphismo. Se sigue que K_{ρ_1} yK_{ρ_2} son isomorfos y ψ puede ser sólo la identidad o la conjugación compleja. □

Corolario 7.7.3. *Si la extensión algebraica $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ tiene r_1 valores absolutos reales y r_2 valores absolutos complejas entonces $[K : \mathbb{Q}] = r_1 + 2r_2$.*

Demostración. Se sigue, de la proposición anterior, que hay r_1 incrustaciones de K en $\mathbb{R}$ y $2r_2$ incrustaciones de K en $\mathbb{C}$ cuya imágen no está contenida en $\mathbb{R}$. Esto dá $r_1 + 2r_2$ incrustaciones complejas en total, y esto debe coincidir con el número de raices del polinomio minimal de α sobre $\mathbb{Q}$. □

7.3 El caso no arquimediano

Contrariamente al caso arquimediano, existe una gran abundancia de cuerpos con valor absoluto que caen en el caso no arquimediano, por lo que dar una clasificación completa no es una alternativa. Esto puede hacerse bajo ciertas restricciones topológicas como veremos en una sección posterior. Por ahora nos conformaremos con dar una demostración formal directa de que la fórmula $\rho'(\alpha) = \rho\Big(N_{F/K}(\alpha)\Big)^{1/[F:K]}$ realmente define un valor absoluto en una extensión finita F de un cuerpo completo K provisto de una valuación v, que define un valor absoluto mediante $\rho(x) = c^{v(x)}$ con $c < 1$. Como estaremos interesados, en lo que sigue, especialmente en extensiones del valor absoluto p-ádico, nor restringiremos a valores absolutos que provienen de una valuación discreta. En otras palabras, asumiremos la existencia de un parámetro uniformizante π, como se define en §6.1, de modo que todo elemento del cuerpo K tiene la forma $u\pi^n$, donde n es un entero y u es una unidad del

anillo $\mathcal{O}_v$. Cuando K es un cuerpo completo con respecto a un valor absoluto que proviene de una valuación v es común escribir $\mathcal{O}_K$ por $\mathcal{O}_v$ y $\mathcal{M}_K$ por $\mathcal{M}_v$. Nótese que $\mathcal{M}_K = \pi\mathcal{O}_K$, y todo ideal de $\mathcal{O}_K$ es de la forma $\pi^n\mathcal{O}_K$ con $n > 0$. Tal ideal puede interpretarse metricamente como una bola cerrada o una bola abierta:

$$\pi^n\mathcal{O}_K = B_0^{[n]} = \{x \in K | \rho(x-0) \leq \rho(\pi)^n\}$$

$$= \{x \in K | \rho(x-0) < \rho(\pi)^{n-1}\} = B_0^{(n-1)}.$$

Mantendremos, en lo que sigue, la convención de utilizar exponente para denotar el logaritmo, respecto de $\rho(\pi)$, del radio de la bola, dado que es un entero. En particular, se tiene $\mathcal{O}_K = B_0^{[0]}$ y $\mathcal{M}_K = B_0^{(0)} = B_0^{[1]}$. Con las mismas convenciones, una clase lateral $a + \pi^n\mathcal{O}_K$ es una bola del tipo $B_a^{[n]}$.

Proposición 7.8. *Sea E/F una extensión algebraica de cuerpos no arquimedianos con valor absoluto ρ. Entonces ρ es no trivial (en E) si y sólo si su restricción a F es no trivial.*

Demostración. Suporgamos que ρ es trivial en F. Sea $\epsilon \in E$. Si ϵ satisface la ecuación $\epsilon^n + a_{n-1}\epsilon^{n-1} + \ldots + a_1\epsilon + a_0 = 0$, entonces, por el principio de dominancia, se tiene $\rho(\epsilon)^n \leq \max_{0\leq i\leq n-1} \rho(\epsilon)^i$. En particular, $\rho(\epsilon)^n \leq \rho(\epsilon)^i$ para algún $i < n$. Se concluye que $\rho(\epsilon) \leq 1$. Como ρ es un homomorfismo multiplicativo, debe de ser trivial en F. □

El resultado precedente nos permite reducir nuestro estudio al caso no trivial. Es fácil ver que el resultado precedente no se extiende a extensiones tracendentes, por ejemplo, para cualquier cuerpo F, la valuación x-ádica es no trivial en el cuerpo de funciones racionales $F(x)$, pero es trivial en F. La condición de que el valor absoluto sea no arquimediano no es realmente necesaria, dado que un valor absoluto arquimediano debe ser no acotado en $\mathbb{Z}$, por lo que es no trivial sobre cualquier subcuerpo.

Proposición 7.9. *Un valor absoluto no arquimediano ρ, definido en un cuerpo K, se extiende al anillo de polinomios $K[x]$ mediante la fórmula $\rho(\sum_i a_i x^i) = \max_i \rho(a_i)$ y, por lo tanto, también al cuerpo de funciones racionales $K(x)$.*

Demostración. Como $K(x)$ es el cuerpo de cocientes de $K[x]$, basta probar la primera afirmación. Sean $f(x) = \sum_i a_i x^i$ y $g(x) = \sum_i b_i x^i$ dos polinomios. Basta ver que $\rho(fg) = \rho(f)\rho(g)$ y que $\rho(f+g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}$. Para la segunda condición se tiene

$$\rho(f+g) = \max_i \rho(a_i + b_i) \leq \max_i \max\{\rho(a_i), \rho(b_i)\}$$

$$= \max\{\max_i \rho(a_i), \max_i \rho(b_i)\} = \max\{\rho(f), \rho(g)\}.$$

Para la primera, observamos que $f(x)g(x) = \sum_k c_k x^k$ con $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$. Esto nos permite obtener la desigualdad $\rho(fg) \leq \rho(f)\rho(g)$, dado que

$$\rho(c_k) \leq \max_{i+j=k} \rho(a_i)\rho(b_j) \leq \rho(f)\rho(g).$$

Necesitamos ver que la igualdad se alcanza para algún k. Para esto, escogemos i_0 maximal con la propiedad $\rho(a_{i_0}) = \rho(f)$. Del mismo modo escogemos j_0 maximal con $\rho(b_{j_0}) = \rho(g)$. Sea $k_0 = i_0 + j_0$, de modo que $c_{k_0} = \sum_{i+j=k_0} a_i b_j$. Afirmamos que el término $a_{i_0} b_{j_0}$ es dominante. Cualquier otro término $a_i b_j$ satisface $i > i_0$ o bien $j > j_0$. La elección de i_0 y j_0 implica que, en tal caso, se tiene $\rho(a_i)\rho(b_j) < \rho(f)\rho(g) = \rho(a_{i_0})\rho(b_{j_0})$. El resultado sigue. □

El cuerpo $K(x)$ no es completo, en general, aún si K lo es. Sin embargo, el espacio de polinomios $K[x]_n$ de grado no mayor a n es completo, por ser un espacio normado de dimensión finita. En todo lo que sigue supondremos que el valor absoluto ρ es discreto en K, y por lo tanto también en $K[x]$.

Proposición 7.10. ***(Lema de Hensel para cuerpos completos).*** *Sea K un cuerpo completo no arquimediano con valor absoluto discreto ρ. Sea $f(x) \in \mathcal{O}_K[x]$ y denotemos por $\bar{f}(x)$ su imagen en $\mathbb{K}[x]$, con $\mathbb{K} = \mathcal{O}_K/\mathcal{M}_K$. Supongamos que $\bar{f}(x)$ tiene una factorización del tipo $\bar{f}(x) = \bar{\phi}(x)\bar{\psi}(x)$, con $\bar{\phi}(x)$ y $\bar{\psi}(x)$ relativamente primos. Entonces existe una factorización $f(x) = \phi(x)\psi(x)$ en $\mathcal{O}_K[x]$, con $\phi(x)$ del mismo grado que $\bar{\phi}(x)$.*

Demostración. Sea $\pi \in K$ un parámetro uniformizante. Probaremos que para todo n existen ϕ_n y ψ_n en $\mathcal{O}_K[x]$, con $\phi_n(x)$ del mismo grado que $\bar{\phi}(x)$, para los que vale la congruencia $\bar{f}(x) \equiv \bar{\phi}_n(x)\bar{\psi}_n(x) \pmod{\mathcal{M}_K^n}$. El caso $n = 1$ está dado por la Hipótesis. Definidos ϕ_n y ψ_n, escogemos ϵ_n y δ_n, con el grado de ϵ_n menor que el de ϕ_n, de modo que se tenga

$$\delta_n\phi_n + \epsilon_n\psi_n \equiv \pi^{-n}(f - \phi_n\psi_n) \pmod{\mathcal{M}_K}. \tag{7.1}$$

Esto puede hacerse via algoritmo de la división en $\mathbb{K}[x]$, dado que el polinomio $\pi^{-n}(f - \phi_n\psi_n)$ tiene coeficientes en $\mathcal{O}_K$ por hipótesis. Entonces, los elementos $\phi_{n+1} = \phi_n + \pi^n\epsilon_n$ y $\psi_{n+1} = \psi_n + \pi^n\delta_n$ satisfacen la congruencia $\bar{f}(x) \equiv \bar{\phi}_{n+1}(x)\bar{\psi}_{n+1}(x) \pmod{\mathcal{M}_K}$. Como ϵ_n y δ_n son elementos del conjunto acotado $\mathcal{O}_K[x]$, las sucesiones ϕ_n y ψ_n son de Cauchy. Además la hipótesis en ϕ_n implica que su grado es acotado, por lo que el límite $\phi(x) = \lim_{n\to\infty}\phi_n(x)$ existe y es un polinomio. El mismo resultado para ψ_n se obtiene observando que (7.1) nos permite asumir $\deg(\delta_n) \leq \max\{\deg(f) - \deg(\phi_n), \deg(\psi_n)\}$, por lo que también el grado de ψ_n permanece acotado. Como $\phi_n(x)\psi_n(x)$ converge a $f(x)$, el resultado sigue. □

Corolario 7.10.1. *Si $\bar{f}$ tiene una raiz simple en $\mathbb{K}$, entonces f tiene una raiz en $\mathcal{O}_K$.*

Corolario 7.10.2. *Sea K un cuerpo completo no arquimediano con valor absoluto discreto ρ. Si $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ es irreducible en $K[x]$, entonces, o bien $\rho(a_n) \geq \rho(a_i)$ para todo i, o bien $\rho(a_0) \geq \rho(a_i)$ para todo i.*

Demostración. Multiplicando por un escalar podemos suponer que el mayor coeficiente es una unidad de $\mathcal{O}_K$. Reduciendo módulo $\mathcal{M}_K$ podemos escribir $\bar{f} = \bar{1} \cdot \bar{f}$, de donde podemos aplicar el lema de Hensel con $\bar{\phi} = \bar{f}$. Se sigue que $\bar{f}$ debe tener grado 0 o tener un grado igual al de igual al de f. Esto termina la demostración. □

Corolario 7.10.3. *Sea K un cuerpo completo no arquimediano con valor absoluto discreto. Si E/K es una extensión finita, y si $\alpha \in E$ es un elemento cuya norma $N_{E/K}(\alpha)$ está en $\mathcal{O}_K$, entonces cada coefficiente del polinomio mónico irreducible de α está en $\mathcal{O}_K$. En particular, α es entero sobre $\mathcal{O}_K$.*

Proposición 7.11. *Sea K un cuerpo completo no arquimediano con valor absoluto discreto ρ. Si E/K es una extensión finita, entonces existe una extensión de ρ a E.*

Demostración. Definimos $\rho'(\alpha) = \sqrt[[E:K]]{\rho[N_{E/K}(\alpha)]}$. El lema precedente prueba que, si $\rho'(\alpha) \leq 1$, entonces α es entero sobre $\mathcal{O}_K$, luego también lo es $\alpha + 1$, de donde $\rho'(\alpha + 1) \leq 1$. Como ρ' es multiplicativa, esto prueba la desigualdad triangular. De hecho, si $\rho'(x) \leq \rho'(y)$, entonces

$$\rho'(x + y) = \rho'(y)\rho'(x/y + 1) \leq \rho'(y) \cdot 1 = \rho'(y).$$

□

Antes de continuar, sería bueno ilustrar la necesidad de demostrar la necesidad de que los límites de la demostración de la proposición son efectivamente polinomios, dando ejemplos de situaciones similares en las que este no es el caso. Para esto, necesitaremos el siguiente resultado técnico:

Proposición 7.12. *Si K es un cuerpo no arquimediano completo, entonces la serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ converge en K, si y sólo si a_n converge a 0 cuando n tiende a ∞. Si además $\rho(a_0) > \rho(a_n)$ para todo $n > 0$ se tiene $\rho\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right) = \rho(a_0)$.*

Demostración. Para probar la primera afirmación, basta observar que si tomamos N lo bastante grande para que $\rho(a_n) < \epsilon$ para cada $n > N$, entonces $\rho(\sum_{k=n}^{m} a_k) < \epsilon$ para cada $m > n > N$ y por lo tanto la sucesión de sumas parciales es de Cauchy. La hipótesis de que a_n converge a 0, nos dice que podemos asumir $\rho(a_k) < \epsilon$ para todo k mayor a N, por lo que el resultado es una consecuencia de la desigualdad ultramétrica y del principio de dominancia. □

Sea E el completado de $K(x)$ con respecto a la extensión del valor absoluto descrito arriba. Entonces la serie $\sum_{i=0}^{\infty}(\pi x)^i$ converge a la función racional $\frac{1}{1+\pi x}$. Del mismo modo, si 2_K es una unidad en $\mathcal{O}_K$, entonces la serie

$$\sqrt{1+\pi x} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{1/2}{i} (\pi x)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1/2(-1/2)\cdots(1/2-i+1)}{i!}(\pi x)^i$$

es convergente en E y su suma es una raiz de $1+\pi x$, por lo que no es una función racional. Nótese que el denominador de $\binom{1/2}{i}$ es una potencia de 2, como el lector podrá comprobar en los ejercicios. Alternativamente, el lema de Hensel puede utilizarse para probar que $1+\pi x$ es un cuadrado en $\mathcal{O}_E$.

Culminaremos esta sección con una última versión del Lema de Hensel, la que es común en la literatura.

Proposición 7.13. ***(Lema de Hensel, última versión).*** *Sea K un cuerpo completo no arquimediano con valor absoluto ρ discreto. Sea $f(x) \in \mathcal{O}_K[x]$ un polinomio, y sea $a \in \mathcal{O}_K$ un elemento que satisface la condición siguiente:*

$$\rho\Big(f(a)\Big) < \rho\Big(f'(a)\Big)^2.$$

Entonces existe un entero $a' \in \mathcal{O}_K$ tal que $\rho(a-a') < 1$ y satisface $f(a') = 0$.

Demostración. Como de costumbre, sea π un uniformizante. El elemento a' se obtiene como el límite de la sucesión definida recursivamente por las reglas $a_0 = a$ y $a_{n+1} = a_n - \epsilon_n$, donde $\epsilon_n = \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$. Basta probar inductivamente las siguientes relaciones:

1. $\rho(\epsilon_n) \leq \rho(\pi)^n$,
2. $\rho\Big(f(a_n)\Big) < \rho\Big(\pi^n f'(a)^2\Big)$,
3. $\rho\Big(f'(a_n)\Big) = \rho\Big(f'(a)\Big)$.

Comenzamos con el caso $n = 1$. Nótese que $\rho(\epsilon) < \rho\Big(f'(a)\Big) \leq 1$, por hipótesis. Se sigue que $\rho(\epsilon_0) \leq \rho(\pi)$. Para probar la afirmación 2 observamos que

$$f(a_1) \equiv f(a) - f'(a)\epsilon_0 = 0 \pmod{\epsilon_0^2},$$

y el resultado sigue del cálculo

$$\rho(\epsilon_0^2) = \rho\Big(f(a)^2 f'(a)^{-2}\Big) = \rho\Big(f(a)\Big)\rho\Big(f(a)f'(a)^{-2}\Big) < \rho\Big(\pi f'(a)^2\Big) \cdot 1.$$

donde el primer factor se acota por $\rho\Big(\pi f'(a)^2\Big)$ y el segundo por 1. Para probar la afirmación 3 se usa la congruencia $f'(a_1) \equiv f'(a) \pmod{\epsilon_0}$, y el resultado sigue de la desigualdad

$$\rho(\epsilon_0) = \rho\Big(f(a)f'(a)^{-1}\Big) < \rho\Big(f'(a)^2 f'(a)^{-1}\Big) = \rho\Big(f'(a)\Big),$$

y del principio de dominancia aplicado a $f'(a_1) = f'(a) + \Big(f'(a_1) - f'(a)\Big)$.

Supongamos ahora que las afirmaciones 1-3 son ciertas para $n = k$ y las probaremos para $n = k + 1$. Para probar la afirmación 1 utilizamos la hipótesis de inducción en 2 y 3, lo que nos da

$$\rho(\epsilon_n) = \rho\left(\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}\right) < \frac{\rho\Big(\pi^n f'(a)^2\Big)}{\rho\Big(f'(a)\Big)} \leq \rho(\pi)^n.$$

Para probar la afirmación 2 utilizamos la congruencia

$$f(a_{n+1}) \equiv f(a_n) + f'(a_n)\epsilon_n = 0 \pmod{\epsilon_n^2},$$

y el resultado sigue de la desigualdad

$$\rho(\epsilon_n^2) = \rho\Big(f(a_n)^2 f'(a_n)^{-2}\Big) = \rho\Big(f(a_n)\Big)\rho\Big(f(a_n)f'(a_0)^{-2}\Big)$$

$$< \rho\Big(\pi^n f'(a_0)^2\Big)\rho(\pi).$$

Para la afirmación 3 se usa la congruencia $f'(a_{n+1}) \equiv f'(a_n) \pmod{\epsilon_n}$, y concluimos utilizando la desigualdad

$$\rho(\epsilon_n) = \rho\Big(f(a_n)f'(a_n)^{-1}\Big) < \rho\Big(f'(a_n)^2 f'(a_n)^{-1}\Big) = \Big(f'(a_n)\Big),$$

así como el principio de dominancia aplicado a la expresión $f'(a_{n+1}) = f'(a_n) + \Big(f'(a_{n+1}) - f'(a_n)\Big)$, que se tiene la cadena de identidades $\rho\Big(f(a_{n+1})\Big) = \rho\Big(f(a_n)\Big) = \cdots = \rho\Big(f(a_0)\Big)$. □

7.4 Ramificación

Sea L/K una extensión finita de cuerpos no arquimedianos completos con valor absoluto ρ discreto. En tal caso se tiene $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_L \cap K$ y $\mathcal{M}_K = \mathcal{M}_L \cap K$. En particular, el cuerpo residual $\mathbb{K} = \mathcal{O}_K/\mathcal{M}_K$ puede identificarse con su imagen $(\mathcal{O}_K + \mathcal{M}_L)/\mathcal{M}_K$ en el cuerpo residual $\mathbb{L} = \mathcal{O}_L/\mathcal{M}_L$. En particular, podemos hablar de la extensión residual $\mathbb{L}/\mathbb{K}$. Su grado $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ recibe el nombre de grado de inercia, y se suele denotar por $f(L/K)$.

El índice de ramificación $e(L/K)$ se define como el índice $[\rho(L^*) : \rho(K^*)]$ entre las correspondientes imágenes del valor absoluto. Si $e(L/K) = 1$ diremos que la extensión L/K es no ramificada, y en este caso un parámetro uniformizante de K sigue siendo un parámetro uniformizante en el cuerpo mayor L. Más generalmente, un parámetro uniformizante π_K de K puede escribirse en la forma $u\pi_L^{e(L/K)}$ donde $u \in \mathcal{O}_L$ y π_L es un parámetro uniformizante de L. Si $f(L/K) = 1$ diremos que la extensión L/K es totalmente ramificada. Es claro de la definición que, en el caso de una torre $K \subseteq F \subseteq L$, se tienen las identidades $e(L/K) = e(L/F)e(F/K)$ y $f(L/K) = f(L/F)f(F/K)$.

Lema 7.14. *Si $e(L/K) = f(L/K) = 1$ entonces $L = K$.*

Demostración. Como $e(L/K) = 1$ todo $\alpha \in L$ es de la forma $a_1 u_1$ donde $a_1 \in K$ y $\rho(u_1) = 1$, es decir $u_1 \in \mathcal{O}_L^*$. Como $f(L/K) = 1$, existe $\lambda_1 \in K$ talque $u_1 \equiv \lambda_1$ mólulo $\mathfrak{m}_K$. Definimos $\alpha_2 = \alpha - a_1\lambda_1$. Claramente $\rho(\alpha_2) < \rho(\alpha)$. Como $e(L/K) = 1$, tenemos que α_2 es de la forma $a_2 u_2$ donde $a_2 \in K$ y $u_2 \in \mathcal{O}_L^*$. Como $f(L/K) = 1$, existe $\lambda_2 \in K$ talque $u_2 \equiv \lambda_2$ mólulo $\mathfrak{m}_K$. Definimos $\alpha_3 = \alpha_2 - a_2\lambda_2$. Claramente $\rho(\alpha_3) < \rho(\alpha_2)$. Iterando este procedimiento tenemos una sucesión $\alpha, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ que tiende a 0 de modo que $\alpha = a_1\lambda_1 + \ldots + a_n\lambda_n + \alpha_{n+1}$ con $a_1\lambda_1 + \ldots + a_n\lambda_n \in K$ para todo n. Se concluye que α es el límite de una sucesión de elementos de K. Como K es completo, debe ser cerrado. El resultado sigue. □

Lema 7.15. *Si la extensión de cuerpos residuales $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ es finita y separable, y si L/K es no ramificada, entonces $f(L/K) = [L : K]$.*

Demostración. Sea $\tilde{\alpha} \in \mathbb{L}$ tal que $\mathbb{L} = \mathbb{L}(\tilde{\alpha})$. La existencia de tal elemento está garantizada por la hipótesis de separabilidad. Sea $\tilde{f}$ el polinomio irreducible de $\tilde{\alpha}$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Por la hipótesis de separabilidad, $\tilde{f}$ tiene raices distintas. Sea $f(x) \in \mathcal{O}_K[x]$ un polinomio del mismo grado que $\tilde{f}$ cuya reducción módulo $\mathcal{M}_K$ es $\tilde{f}$. Entonces, por el lema de Hensel, f tiene una raiz simple α en L cuya reducción módulo $\mathcal{M}_L$ es α. Como $\mathcal{O}_K$ es un dominio de ideales principales, es factorial. Luego, si f es irreducible en $\mathbb{K}[x]$, y por lo tanto en $\mathcal{O}_K[x]$, también lo es en $K[x]$. Si $F = K[\alpha]$, entonces L/F satisface $e(L/F) = f(L/F) = 1$. Luego $F = L$, por el resultado precedente. En particular, tenemos que

$$[L : K] = [F : K] = \deg(f) = \deg(\tilde{f}) = [\mathbb{L} : \mathbb{K}] = f(L/K).$$

□

La hipótesis de separabilidad no es esencial para el resultado precedente. Sólo simplifica la demostración. En la próxima sección nos reduciremos al caso donde el cuerpo residual es finito, y por lo tanto perfecto, por lo que una versión más general es inecesaria. Además, la separabilidad es crucial en algunos de los resultados siguientes.

Lema 7.16. *Sea K un cuerpo con valor absoluto no arquimediano completo con cuerpo residual $\mathbb{K}$. Sea $L = K[\alpha]$ una extensión de K generada por un elemento entero $\alpha \in \mathcal{O}_L$. Sea f el polinomio irreducible de α sobre K y sea $\tilde{f}$ el polinomio irreducible, sobre $\mathbb{K}$, de la imagen $\tilde{\alpha}$ de α en el cuerpo residual $\mathbb{L} = \mathcal{O}_L/\mathcal{M}_L$. Si f y $\tilde{f}$ tienen el mismo grado, entonces L/K es no ramificada.*

Demostración. Sea $\{\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n\}$ una base de la extensión $\mathbb{L}/\mathbb{K}$, y tomemos preimágenes $\{z_1, \ldots, z_n\}$ en $\mathcal{O}_L$. Afirmamos que estos elementos son linealmente independientes sobre K. La hipótesis sobre los grados prueba entonces que son base. Para probar la afirmación tomamos una combinación lineal $\sum_i a_i z_i$. Multiplicando por un elemento de K de ser necesario, suponemos que los coeficientes a_i son enteros y al menos uno es una unidad. Esto nos permite mirar su imagen en el cuerpo residual, la que resulta ser una combinación lineal no trivial de la base $\{\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n\}$. Esto implica que es no nula en K, y por lo tanto $\{z_1, \ldots, z_n\}$ es base, pero también que su valor absoluto es 1, y por lo tanto un elemento de $\rho(K^*)$. Haber multiplicado por un elemento de K no modifica esta última propiedad. Como todo elemento de L es una combinación lineal de la base $\{z_1, \ldots, z_n\}$, el resultado sigue. □

Lema 7.17. *Sea K un cuerpo con valor absoluto no arquimediano completo con un cuerpo residual perfecto. Si F_1 y F_2 son extensiones no ramificadas de K, también lo es F_1F_2.*

Demostración. Como se tiene $e(F_1F_2/F_1)e(F_1/K) = e(F_1F_2/K)$, basta probar que F_1F_2/F_1 es no ramificada. Escribamos $\mathbb{K}$, $\mathbb{F}_1$ y $\mathbb{F}_2$ para los cuerpos residuales de K, F_1 y F_2. La demostración del Lema 7.15 nos permite escribir $F_2 = K(\alpha)$, donde α es una unidad cuya imagen $\tilde{\alpha}$ satisface $\mathbb{F}_2 = \mathbb{K}(\tilde{\alpha})$, y con polinomios irreducibles correspondientes denotados por f y $\tilde{f}$. Sea h el polinomio irreducible de α sobre F_1 Como f tiene coeficientes enteros, cada una de sus raices es entera sobre $\mathcal{O}_K$, por lo que h es un producto, sobre la clausura algebraica $\overline{K}$, de polinomios de la forma $x - \lambda$ con λ entero, y por lo tanto tiene coeficientes enteros. Si $f = hg$ en $F_1[x]$, el mismo argumento prueba que g tiene coeficientes enteros. Sean $\tilde{h}$ y $\tilde{g}$ las imagenes de h y g en $\mathbb{F}_1[x]$. Se tiene que $\tilde{f} = \tilde{h}\tilde{g}$. Es claro que $\tilde{\alpha}$ satisface el polinomio $\tilde{h}$. Afirmamos que $\tilde{h}$ es irreducible en $\mathbb{F}_1[x]$. De no ser así podríamos escribir $\tilde{h} = \tilde{h}_1\tilde{h}_2$, y los polinomios $\tilde{h}_1$, $\tilde{h}_2$ tendrían que ser relativamente primos por la hipótesis de separabilidad. En este caso, el lema de Hensel prueba que h es reducible. Esto prueba la afirmación. La demostración concluye aplicando el lema precedente. □

Lema 7.18. *Si L/K es totalmente ramificada, entonces es finita y $e(L/K) = [L : K]$.*

Demostración. Sea $\pi_L \in L$ y $\pi_K \in K$ parámetros uniformizantes de los cuerpos respectivos. Sea $e = e(L/K)$. Entonces $\pi_L^e \pi_K^{-1}$ es una unidad de

$\mathcal{O}_L$. Como $f(L/K) = 1$, se tiene $\mathbb{K} = \mathbb{L}$, luego debe existir un elemento $u_0 \in \mathcal{O}_K^*$ cuya reducción módulo $\mathcal{M}_L$ coincida con $\pi_L^e \pi_K^{-1}$, de donde obtenemos $\pi_L^e = u_0\pi_K + \epsilon_1$ con $\rho(\epsilon_1) < \rho(\pi_K)$. Como ϵ_1 es un elemento de L, podemos escribir $\rho(\epsilon_1) = \rho(\pi_L)^{m_1}$ para algún entero $m_1 > 0$. Escribamos $m_1 = eq_1 + r_1$, con $0 \leq r_1 < e$ y encontremos, como antes, una unidad $u_1 \in \mathcal{O}_K^*$ tal que $\epsilon_1 = u_1\pi_K^{q_1}\pi_L^{r_1} + \epsilon_2$, con $\rho(\epsilon_2) < \rho(\epsilon_1)$. Este proceso se itera, obteniendose una serie infinita convergente

$$\pi_L^e = u_0\pi_K + \sum_{j=1}^{\infty} u_j \pi_K^{q_j}\pi_L^{r_j}, \tag{7.2}$$

en la que los enteros $m_j = eq_j + r_j$ forman una sucesión infinita creciente. Si i es un entero entre 0 y $e-1$, escribimos $T_i = \{j \in \mathbb{Z}_{>0} | r_j = i\}$. Con esta notación, re-escribimos la suma de arriba como sigue:

$$\pi_L^e - \pi_L^{e-1} \sum_{j \in T_{e-1}} u_j \pi_K^{q_j} - \pi_L^{e-2} \sum_{j \in T_{e-2}} u_j \pi_K^{q_j} - \cdots$$

$$-\pi_L^1 \sum_{j \in T_1} u_j \pi_K^{q_j} - \left(u_0\pi_K - \sum_{j \in T_0} u_j \pi_K^{q_j} \right) = 0. \tag{7.3}$$

Esta expresión es un polinomio en π_L cuyos coeficientes están en K, dado que K es completo. Además, $e = m_0 < m_j = eq_j + r_j$, por lo que ningún exponente q_j puede anularse. Se sigue que π_K divide a cada coeficiente. Además el primer sumando del término libre es dominante, por lo que se trata de un polinomio de Eisenstein. En particular es irreducible.

Sea $F = K(\pi_L)$. El argumento precedente muestra que $[F : K] = e$. Afirmamos que $F = L$. Es claro que $f(L/F) = 1$, ya que el grado de inercia es multiplicativo y $f(L/K) = 1$. Del mismo modo, el hecho de que $\pi_L \in F$ nos muestra que $e(F/K) \geq e$, por lo que la ecuación $e(L/F)e(F/K) = e$ implica que $e(L/F) = 1$. El resultado sigue. □

Proposición 7.19. *Sea K un cuerpo con valor absoluto no arquimediano completo con un cuerpo residual perfecto. Dada una extensión finita E/K existe una única subextensión no ramificada F/K maximal. Además se tienen las identidades $[F : K] = f(F/K) = f(L/K)$, $[L : F] = e(L/F) = e(L/K)$ y $e(F/K) = f(L/F) = 1$.*

Demostración. Claramente, la existencia y unicidad de una extensión no ramificada maximal sigue del Lema 7.17. Necesitamos, sin embargo, probar que esta extensión tiene el mayor grado posible, es decir que $[F : K] = f(F/K) = f(L/K)$. Bastará pues probar que existe una extensión no ramificada de este grado. Sea $\alpha \in \mathcal{O}_L^*$ un elemento cuya imagen $\tilde{\alpha} \in \mathbb{L}$ genera $\mathbb{L}$ sobre $\mathbb{K}$. Sea $g \in \mathcal{O}_K[x]$ un polinomio cuya imagen $\tilde{g}$ es el polinomio irreducible de $\tilde{\alpha}$, escogido de forma que los grados de los dos polinomios coincidan. Entonces, por el lema de Hensel, g tiene una raiz β en L. Sea $F = K(\beta)$. Claramente $f(F/K) = f(L/K)$, y F/K es no ramificada por el Lema 7.17. Además $e(F/K) = 1$ dado que la extensión es no ramificada. Todas las identidades restantes siguen por multiplicatividad. □

Corolario 7.19.1. *Si L/K es finita, se tiene $e(L/K)f(L/K) = [L : K]$.* □

Proposición 7.20. *Toda raiz de un polinomio de Eisenstein genera una extensión totalmente ramificada y es un parámetro uniformizante de dicha extensión.*

Demostración. Sea α una raiz de tal polinomio, digamos

$$f(x) = x^n + a_{n-1}\pi x^{n-1} + \ldots + xa_1\pi x + \pi,$$

donde π es un uniformizante y los a_i son enteros. Desarrollando la identidad $f(\alpha) = 0$, se tiene $\alpha^n = -\pi(1 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1})$. Esta identidad nos dice que $\rho(\alpha) < 1$ por lo que, en particular, 1 es el término dominante de la expresión en paréntesis. Concluimos que $\rho(\alpha)^n = \rho(\pi)$, de donde sigue el resultado. □

7.5 Cuerpos locales

A partir de este punto limitaremos un poco el rango de cuerpos completos en los que nos enfocamos. Por un cuerpo local, nos referimos a un cuerpo con valor absoluto completo due es localmente compacto con respecto a la topología definida por el valor absoluto. Recuérdese que un espacio topológico es localmente compacto cuando todo punto tiene una vecindad compacta.

Lema 7.21. *Sea K un cuerpo con valor absoluto completo y no arquimediano. Entonces toda bola es abierta y cerrada. En particular, $\mathcal{O}_K = B(0, 1)$ es abierto y cerrado.*

Demostración. El principio de dominancia implica que, si x_n converge a x, y si $y \neq x$ es un elemento cualquera de K, entonces los valores abolutos de $y - x$ e $y - x_n$ coinciden para n suficientemente grande. Se sigue que, si B es una bola centrada en y, x pertenece a B si y sólo si x_n pertenece a y para todo n suficientemente grande. Esto prueba tanto que la bola es abierta como que es cerrada. En principio, habría que considerar el caso $x = y$, pero esto no es necesario, dado que las bolas en un cuerpo no arquimediano tienen múltiples centros, por lo que siempre se puede escoger uno que no coincide con x. □

Proposición 7.22. *Sea K un cuerpo con valor absoluto completo y no arquimediano. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i)K es localmente compacto.

ii)$\mathcal{O}_K$ es compacto.

iii) k es finito y la imagen de ρ es discreta.

Demostración. Todo punto $\lambda \in K$ tiene la vecindad abierta $\lambda + \mathcal{O}_K$, por lo que (ii) implica (i). Para probar la inversa, debe observarse que los ideales principales $\alpha\mathcal{O}_K$ son homeomorfos a $\mathcal{O}_K$, mediante la biyección continua $x \mapsto \alpha x$, cuya inversa $x \mapsto \alpha^{-1}x$ es también continua. Esto preba que, si el anillo $\mathcal{O}_K$ es compacto, tambien lo es cada ideal principal. Si un elemento $\lambda \in K$ tiene la vecindad compacta V, la definición de la topología definida por el valor absoluto nos dice que el conjunto$\lambda + \alpha\mathcal{O}_K$ está contenido en V para algún α con valor absoluto suficientemente pequeño, por lo que, siendo cerrado, debe ser compacto, por lo que $\mathcal{O}_K$ también lo es.

Supongamos ahora que se cumplen (i) y (ii). Nótese que, siendo cada clase lateral $a+\mathcal{M}_K$ un conjunto abierto, la función $a \mapsto \bar{a} = a+\mathcal{M}_K$ es una función continua si se asigna al cuerpo residual $\mathbb{K} = \mathcal{O}_K/\mathcal{M}_K$ la topología discreta, es decir la que corresponde al valor absoluto discreto. Si $\mathcal{O}_K$ es compacto, también lo debe ser su imagen $\mathbb{K}$. Por ser $\mathbb{K}$ discreto, debe ser un conjunto finito. Del mismo modo, el valor absoluto ρ es continuo. Sea Γ la imagen de ρ. Entonces $\Gamma \cap [1/2, 1) = \rho[B(0,1)\backslash B(0,1/2)]$ es un compacto, luego Γ no puede contener una sucesión que converja a 1 por abajo, y por lo tanto, siendo un subgrupo, no contiene puntos en alguna vecindad de 1. Esto prueba que (ii) implica (iii). Para la inversa, Supongamos que ρ es discreto y $\mathbb{K}$ finito. Entonces el ideal maximal $\mathcal{M}_K$ de $\mathcal{O}_K$ es de la forma $\pi\mathcal{O}_K$ con un parámetro uniformizante $\pi \in K$. Dado que $\pi^n\mathcal{O}_K/\pi^{n+1}\mathcal{O}_K$ es isomorfo a $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ para todo n, se concluye que todos esos cocientes son finitos, por lo

que también lo es el cociente $\mathcal{O}_K/\pi^n\mathcal{O}_K$ para todo n. Escribamos $c = \rho(\pi)$. Escogiendo un punto de cada clase lateral módulo π^n se obtiene un conjunto finito que está a una distancia menor o igual a c^n de cada punto de $\mathcal{O}_K$. Como c^n puede tomarse arbitrariamente pequeño, esto nos dice que $\mathcal{O}_K$ es un espacio métrico totalmente acotado, y por lo tanto, siendo completo, es compacto. □

Ejemplo 7.23. En el cuerpo $K = F(x)$ existe un único valor absoluto que satisface $\rho(x) = 2^{-1}$, de hecho, es el valor absoluto x-ádico con la normalización apropiada. Su completado es el cuerpo de series de Laurent $F((x))$. El cuerpo residual es F y la imagen de ρ es el conjunto de potencias de 2. En particular $F((x))$ es localmente compacto si y sólo si F es finito.

Ejemplo 7.24. El cuerpo $K = \mathbb{F}_p(x^r | r \in \mathbb{Q})$ tiene un valor absoluto que satisface $\rho(x^r) = 2^{-r}$ para cada n
umero racional r. Su completado tiene un cuerpo residual finito, pero la imagen de ρ no es discreta, luego no es localmente compacto.

Observación 7.25. Sea K un cuerpo completo no arquimediano. Si la característica de K es $p \neq 0$, entonces $p_K = 0_K$, de modo que la característica del cuerpo residual $\mathbb{K}$ es también p. Si la característica de K es 0 y la característica de $\mathbb{K}$ es $p \neq 0$, entonces $p_K \in \mathcal{M}_K$. en particular, la restricción de ρ a $\mathbb{Q}$ es equivalente al valor absoluto p-ádico. Se sigue que, salvo por una renormalización delvalor absoluto, podemos asumir que la clausura de $\mathbb{Q}$ en K es el completado de $\mathbb{Q}$ respecto de dicha restricción, vale decir, el cuerpo p-ádico $\mathbb{Q}_p$.

Proposición 7.26. *Todo cuerpo con valor absoluto completo no arquimediano K de característica* 0 *es una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$.*

Demostración. La observación precedente prueba que K contiene a $\mathbb{Q}_p$. Como el cuerpo residual $\mathbb{K}$ es finito, debe ser de la forma $\mathbb{F}_{p^r} = \mathbb{F}_p[\bar{\alpha}]$, para algún entero $r \geq 1$ y algún elemento $\bar{\alpha} \in \mathbb{F}_{p^r}$. Sea $\bar{f}(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ el polinomio irreducible de $\bar{\alpha}$ sobre $\mathbb{F}_p$. Sea $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ una preimagen de $\bar{f}(x)$ del mismo grado. Como todo cuerpo finito es perfecto, el polinomio $f(x)$ debe tener raices distintas. Se sigue del Lema de Hensel que existe una raiz $\alpha \in \mathcal{O}_K$ de $f(x)$ cuya imagen en $\mathbb{K}$ es $\bar{\alpha}$. Se sigue que $\mathbb{Q}_p(\alpha)$ es una extensión finita de $\mathbb{Q}_p$ y que la extensión $K/\mathbb{Q}_p(\alpha)$ es totalmente ramificada. Se sigue ahora del Lema 7.18 que $[K/\mathbb{Q}_p(\alpha)] = e(K/\mathbb{Q}_p[\alpha]) < \infty$. □

El resultado análogo en característica positiva es aún más explicito:

Corolario 7.26.1. *Si K es un cuerpo con valor absoluto localmente compacto de caracteristica $p > 0$, entonces K es isomorfo a $\mathbb{F}_{p^r}((x))$ para algún r.*

Demostración. La hipótesis en la característica implica que $\mathbb{F}_p$ está contenido en K. Como antes, el cuerpo residual puede escribirse $\mathbb{F}_{p^r} = \mathbb{F}_p[\bar{\alpha}]$. Sea f el polinomio minimal de $\bar{\alpha}$ en $\mathbb{F}_p$. Entonces $\bar{\alpha}$ es una raiz simple de f, y por lo tanto es la imagen de una raiz α de f en el anillo de enteros $\mathcal{O}_K$. Como $\bar{\alpha}$ y α son raices del mismo polinomio irreducible, se tiene $\mathbb{F}_p[\alpha] \cong \mathbb{F}_p[\bar{\alpha}]$ $cong\mathbb{F}_{p^r}$. Podemos, por lo tanto, suponer que $\mathbb{F}_{p^r}$ está contenido en K. Además, el valor absoluto es trivial sobre $\mathbb{F}_{p^r}$, ya que este cuerpo es finito.

Sea π un parametro uniformizante de K. Afirmamos que π es trascendente sobre $\mathbb{F}_{p^r}$. La afirmación sigue del hecho de que todo polinomio en π tiene el mismo valor absoluto que su coeficiente no nulo con la potencia más baja de π por el principio de dominancia, por lo que ningún polinomio en π se anula. Se sigue que $\mathbb{F}_{p^r}[\pi]$ es isomorfo al anillo de polinomios en una variable sobre el cuerpo finito, y su cuerpo de cocientes E es, por lo tanto, isomorfo al cuerpo de funciones racionales. Además, la restricción a E del valor absoluto de K es equivalente al valor absoluto π-ádico, por lo que su completado $\bar{E}$, al que podemos identificar con la clausura de E en K, es isomorfo al cuerpo de series de Laurent. Basta ahora probar que $\bar{E} = K$, pero esto es una consecuencia de los resultados de la sección anterior, dado que $K/\bar{E}$ es, a la vez, no ramificado y totalmente ramificado. Lo primero se sigue del hecho de que $\bar{E}$ contiene un parámetro uniformizante y lo segundo del hecho de que $\bar{E}$ contiene una preimagen del generador del cuerpo residual. Esto concluye la demostración. □

Los resultados precedentes nos dejan con la siguiente lista completa de cuerpos locales:

- Los cuerpos arquimedianos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.
- Las extensiones finitas de $\mathbb{Q}_p$.
- Los cuerpos de series de Laurent sobre cuerpos finitos.

7.6 El árbol de Bruhat-Tits

Los cuerpos locales no arquimedianos tienen una estructura que generaliza, en forma bastante directa, la de los cuerpos p-ádicos. El anillo de enteros

$\mathcal{O}_K$ se descompone como unión de clases laterales

$$\mathcal{O}_K = \bigcup_{i=1}^{n} a_i + \pi\mathcal{O}_K,$$

donde $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ es un conjunto de representantes de las diversas clases residuales. A menudo se asume que 0 es el representante de la clase correspondiente, lo que haremos en todo lo que sigue. La función $x \mapsto a_i + \pi x$ nos permite trasladar dicha descomposición a cada una de las clases residales anteriores para obtener, esta vez para las clases módulo π^2 un representante de la forma $c + \pi b$, con $b, c \in S$. Iterando este procedimiento, se obtiene, para cada clase lateral módulo π^n, un único representante de la forma $b_0 + b_1\pi + b_2\pi^2 + \cdots + b_{n-1}\pi^{n-1}$. Si quiere recuperarse la clase de dicho representante módulo alguna potencia π^m con $m < n$, simplemente se podan los últimos $n - m$ términos de dicha suma. Esto permite interpretar las clases residuales como vértices de un árbol infinito similar al descrito en §6.6. Cada camino descendiente en dicho arbol corresponde a una intersección de bolas cerradas cuyos diametros tienden a 0, y por lo tanto a un único elemento del cuerpo completo K. Alternativamente, podemos interpretar cada elemento de K como una serie infinita del tipo $\lambda = b_0 + b_1\pi + b_2\pi^2 + \cdots$.

Del mismo modo que en el caso p-ádico, podemos completar este árbol hacia arriba indefinidamente utilizando la simetría $y \mapsto \pi^{-r}y$. La unión de todos los árboles así obtenidos es un árbol homogéneo en el cual cada vértice tiene valencia $1 + \sharp\mathbb{K}$. A este le llamaremos el árbol de Bruhat-Tits del cuerpo K y lo denotaremos por $\mathfrak{t}(K)$. Cada elemento de K corresponde a un único camino descendente que va del extremo superior, identificado con el infinito, a alguno de los incontables extremos inferiores. A cada uno de tales elementos se asocia una expansión del tipo $a = b_{-N}\pi^{-N} + b_{-N+1}\pi^{-N+1} + b_{-N+2}\pi^{-N+2} + \cdots$. El entero $-N$ indica la altura a la que dicho camino se separa del camino que corresponde al elemento 0. Cada vértice de este árbol corresponde a una bola del cuerpo K de manera análoga a lo que se describió en §6.6 para el caso p-ádico.

Nótese que si E/K es una extensión no ramificada, el árbol $\mathfrak{t}(K)$ puede interpretarse cómo un subgrafo de $\mathfrak{t}(E)$. Esto se consigue agregando nuevas aristas saliendo de cada uno de los antiguos vértices, las que hemos representado en lineas rojas en la Figura 7.1A. Nótese que cada una de estas nuevas aristas unen un vértice de $\mathfrak{t}(K)$ con un nuevo vértice del cual salen nuevas aristas de la manera usual. Es conveniente recordar que $\mathfrak{t}(K)$ es un subgrafo

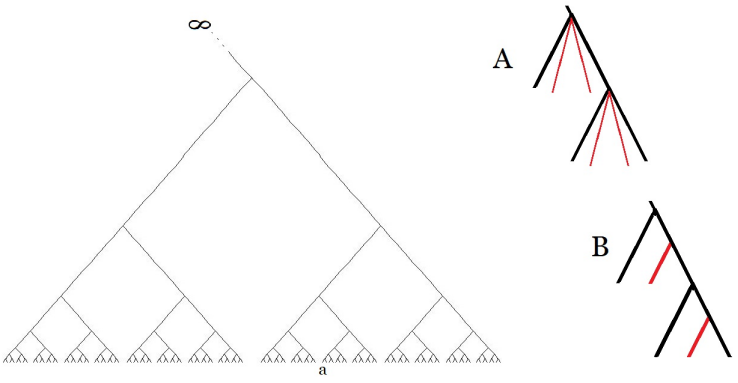


Figure 7.1: El árbol de Bruhat-Tits de un cuerpo local.

conexo de $\mathfrak{t}(E)$. En el caso ramificado, $\mathfrak{t}(K)$ no es realmente un subgrafo de $\mathfrak{t}(E)$, ya que la aparición de elementos cuyo valor absoluto no coincide con el de ningún elemento de K obliga a colocar vertices intermedios en la aristas de $\mathfrak{t}(K)$ para visualizar correctamente el nuevo árbol. Esta situación se ilustra en la Figura 7.1B, donde se asume que el índice de ramificación es 2. Esto no es grave si uno identifica el árbol con el espacio topológico subyacente, pues en este caso aún se visaliza $\mathfrak{t}(K)$ como un subespacio de $\mathfrak{t}(E)$. Alternativamente, uno puede dar una definición apropiada de grafo subdividido, de modo que sea esta subdivisión la que es un subgrafo de $\mathfrak{t}(E)$. Los detalles no son demasiado relevantes en tanto esta construcción se use sólo como una ayuda para la intuición.

Para ilustrar cómo el árbol de Bruhat-Tits nos dá una mejor intuición de estos espacios lo utilizaremos para probar el siguiente resultado:

Proposición 7.27. ***(Lema de Krasner).*** *Sea E/K una extensión Galoisiana de cuerpos locales. Sea $a \in E$, y sea $b \in E$ tal que $\rho(b-a) < \rho(b-a')$, para toda raiz $a' \neq a$ del polinomio irreducible de a sobre K. Entonces $K(b) \subseteq K(a)$.*

Demostración. Nótese que $\rho\Big(\sigma(x)\Big) = \rho(x)$ para todo elemento $x \in E$ y cada automorfismo $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/K)$ por la unicidad de la extensión. Se sigue que el grupo de Galois actua en K preservando diámetros de bolas.

En particular, $\mathrm{Gal}(E/K)$ actúa en el árbol de Bruhat-Tits, llevando vértices en cierto nivel a otros vértices al mismo nivel. Se concluye de la Figura 7.2

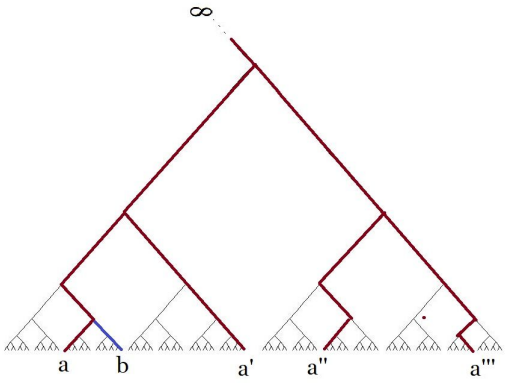


Figure 7.2: Diagrama para demostrar el Lema de Krasner.

que todo elemento del grupo de Galois que fija b debe fijar también a a. El resultado es, ahora, una consecuencia directa de la correspondencia de Galois. □

Mucho de lo dicho en esta sección se puede generalizar a cuerpos no arquimedianos completos más generales si se generaliza la noción de grafo, o se remplaza por un espacio topológico definido en forma apropiada. El espacio de Berkovich se utiliza de este modo para estudiar los análogos p-ádicos del cuerpo de números complejos.

7.7 Extension del valor absoluto en un cuerpo no completo

Consideremos ahora un cuerpo con valor absoluto K no completo. Sea $\overline{K}$ el completado. Sea L/K una extensión algebraica finita. Consideremos a L como un espacio vectorial sobre K con una base $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$, y consideremos el $\overline{K}$-espacio vectorial $L_{\overline{K}} = \overline{K} \otimes L$. Este espacio tiene, por definición, una base $\{1 \otimes \lambda_1, 1 \otimes \lambda_2, \cdots, 1 \otimes \lambda_n\}$, y una combinación lineal toma la forma $\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes \lambda_i$. La multiplicación por escalares opera en el primer factor, es decir $v \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} (vu_i) \otimes \lambda_i$. De hecho, puede definirse el producto

de dos elementos de $L_{\overline{K}}$ extendiendo la multiplicación de L, vale decir, si $\lambda_i\lambda_j = \sum_{k=1}^{n} a_{i,j}^k \lambda_k$, se define la multiplicación en $L_{\overline{K}}$ mediante la fórmula análoga:

$$(1 \otimes \lambda_i)(1 \otimes \lambda_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,j}^k (1 \otimes \lambda_k),$$

la que se extiende por linealidad. Los coeficientes $a_{i,j}^k$ recibe el nombre de constantes de estructura de L como K-álgebra. Cualquier relación algebraica entre los elementos de la base de L se preserva al pasar a $L_{\overline{K}}$. La teoría de productos tensoriales nos muestra que la construcción precedente es independiente de la base escogida.

Supongamos ahora que L/K es separable, de modo que podamos escribir $L = K[\alpha]$ donde α es raiz de un polinomio irreducible f de grado $n$que es relativamente primo con su derivada f'. En este caso, $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ es una base. De acuerdo a lo visto en los capítulos anteriores, esto nos permite escribir $L \cong \frac{K[x]}{(f)}$. En este caso, $L_{\overline{K}}$ tiene una base $\{\tilde{1}, \tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}^2, \ldots, \tilde{\alpha}^{n-1}\}$, donde $\tilde{1} = 1 \otimes 1$ y $\tilde{\alpha} = 1 \otimes \alpha$. El elemento $\tilde{\alpha}$ satisface el mismo polinomio f, por lo que se concluye el isomorfismo $L_{\overline{K}} \cong \frac{\overline{K}[x]}{(f)}$. Dado que f no tiene raices repetidas en la clausura algebraica de $\overline{K}$, por ser relativamente primo con su derivada, se puede utilizar el Teorema Chino de los Restos para escribir

$$L_{\overline{K}} \cong \frac{\overline{K}[x]}{(f_1)} \times \frac{\overline{K}[x]}{(f_2)} \times \cdots \times \frac{\overline{K}[x]}{(f_m)},$$

donde cada uno de los factores es un cuerpo, es decir, una extensión finita de $\overline{K}$. En particular, existe una única extensión ρ_i del valor absoluto ρ de $\overline{K}$ a $L_i = \frac{\overline{K}[x]}{(f_1)}$. Definimos la norma en $L_{\overline{K}}$ mediante la fórmula

$$n(x_1, \ldots, x_m) = \rho_1(x_1) + \ldots + \rho_m(x_m).$$

Dejamos al lector comprobar que esta función es efectivamente una norma en el $\overline{K}$-espacio vectorial $L_{\overline{K}}$. Como tal, esta es equivalente a cualquier otra norma en dicho espacio. Concluimos que L es denso en $L_{\overline{K}}$ y que $L_{\overline{K}}$ es completo respecto de la norma. Más aún, la imagen de L, bajo la proyección canónica, en cada uno de los factores L_i, es densa en dicho factor, y es isomorfa a L, dado que L es un cuerpo. Concluimos que el cuerpo L_i es el completado de L con respecto a una extensión ρ_i del valor absoluto de K a L. Además, estas extensiones deben ser distintas, dado que el hecho de que

L es denso en el producto de los L_is implica que existen elementos de L que aproximan muy bien los idempotentes correspondientes, por lo que deben tener un valor absoluto cerca de 1, y los restantes cerca de 0.

Afirmamos ahora que los ρ_i son todas las posibles extensiones de ρ a L. De hecho, si ρ' es tal extensión, y si $\overline{L}$ es el completado correspondiente, entonces $\overline{K}$ se identifica con la clausura de K en $\overline{L}$. Bajo esta identificación, la relación $L = K[\alpha]$ implica $\overline{L} = \overline{K}[\alpha]$. esto nos muestra que $\overline{L}$ es isomorfo al cuerpo generado por alguna raiz de f, y por lo tanto a alguno de los L_i.

Si obsrvamos que la $\overline{K}$-dimensión de $L_{\overline{K}}$ coincide con la K dimensión de L se tiene la fórmula

$$[L : K] = \sum_{i=1}^{m} [L_i : \overline{K}]. \tag{7.4}$$

Ejemplo 7.28. Sea ρ el valor absoluto usual en $\mathbb{Q}$, y sea $L = \mathbb{Q}[\alpha]$ una extensión finita de $\mathbb{Q}$. Entonces existe un valor absoluto arquimediano en L por cada raiz real del polinomio irreducible f de α, y uno por cada par de raices complejas conjugadas. Nótese que si f tiene r_1 raices reales y r_2 pares de raices complejas conjugadas, se tiene $r_1 + 2r_2 = [L : \mathbb{Q}]$. Las raices reales corresponden a valores absolutos cuyo completado es isomorfo a $\mathbb{R}$, mientras que las raices complejas corresponden a valores absolutos cuyo completado es isomorfo a $\mathbb{C}$. El valor absoluto $|\cdot|_i$ que corresponde a una raiz α_i se define por $|f(\alpha)|_i = |f(\alpha_i)|$.

Combinando los resultados de esta sección con los de secciones anteriores, se obtiene lo siguiente:

Proposición 7.29. *Sea E/K una extensión finita y eparable, ea ρ un valor absoluto en K. Entonces existe una cantidad finita m de valores absolutos ρ_i en E que extienden a ρ y se satisface la identidad (7.4). Si ρ es no-arquimediano, se tiene además la relación*

$$[L : K] = \sum_{i=1}^{m} e(L_i/\overline{K}) f(L_i/\overline{K}). \tag{7.5}$$

□

Ejemplo 7.30. Sea ρ un valor absoluto no-arquimediano en un cuerpo K, y sea L/K una extensión cuadrática. En este caso, la relación (7.5) nos deja exactamente tres posibilidades:

- $m = 2$ y $e(L_i/\overline{K}) = f(L_i/\overline{K}) = 1$ para cada $i \in \{1, 2\}$. Es este caso se dice que la extensión L/K es descompuesta en ρ, o que ρ se descompone en dicha extensión.
- $m = 1 = e(L_1/\overline{K})$ y $f(L_1/\overline{K}) = 2$. Es este caso se dice que la extensión L/K es inerte en ρ, o que ρ es inerte en dicha extensión.
- $m = 1 = f(L_1/\overline{K})$ y $e(L_1/\overline{K}) = 2$. Es este caso se dice que la extensión L/K es ramificada en ρ, o que ρ es ramificada en dicha extensión.

7.8 Ejercicios

1. Probar que el denominador de $\binom{1/2}{n}$ es una potencia de 2 para cada entero positivo n. **Sugerencia:** Utilizar la identidad $\sqrt{1+x}^2 = 1 + x$ para comprobar que $\sum_{i+j=n} \binom{1/2}{j}\binom{1/2}{i} = 0$ para cada $n \geq 2$ y dar un argumento por inducción.
2. Si V es un espacio vectorial normado sobre un cuerpo K, probar que la suma de vectores, la multiplicación escalar, y la función norma, son continuas.
3. Sea $V = \mathbb{Q}_p^n$ con cualquier norma. Probar que si una sucesión de vectores $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 entonces cada coordenada converge a 0.
4. Probar que -1 es un cuadrado en $\mathbb{Q}_5$, pero no en $\mathbb{Q}_3$.
5. Probar que si n y $p(p-1)$ son relativamente primos, todo elemento de $\mathbb{Z}_p^*$ es una potencia n-ésima.
6. Probar que el grupo multiplicativo $\mathbb{Q}_p^*/(\mathbb{Q}_p^*)^2$ tiene 4 elementos si p es impar y 8 elementos si $p = 2$.
7. Encuentre todos los enteros n tales que la ecuación $x^2 - n = 0$ tiene raices en $\mathbb{Q}_5$. Justifique.
8. Encuentre un parametro uniformizante del cuerpo $\mathbb{Q}_2(\sqrt{3})$ y utilicelo para demostrar que $\mathbb{Q}_2(\sqrt{3})/\mathbb{Q}_2$ es una extensión ramificada. **Sugerencia:** ¿Puede modificarse $x^2 - 3$ para obtener un polinomio de Eisenstein?

9. Sea $u \in \mathfrak{m}_{F((x))}$. Probar que $F((x)) = F((u))$ si y sólo si $\rho(u) = \rho(x)$, donde ρ es el valor absoluto usual en $F((x))$. Mas generalmente, probar que
$$[F((x)) : F((u))] = \log_{\rho(x)} \Big(\rho(u)\Big).$$

10. Probar que si F es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 0, entonces toda extensión algebraica de $F((x))$ es de la forma $F((x^{1/n}))$ **Sugerencia:** Probar que toda tal extensión es totalmente ramificada y por lo tanto generada por un elemento α que satisface un polinomio de Eisenstein sobre $F((x))$. Probar que α genera una extensión no ramificada sobre $F((x^{1/n}))$.

11. Sea L/K una extensión de cuerpos no arquimedianos tal que la extensión $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ de cuerpos residuales es separable. Probar que si α_1 y α_2 son elementos de $\mathcal{O}_L$ que generan extensiones no ramificadas, y si $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathcal{M}_L$, entonces $K(\alpha_1) = K(\alpha_2)$. Utilizar este hecho para probar que existe una biyección entre subestensiones de $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ y subextensiones no ramificadas de L/K.

12. Probar que si L/K es una extensión de cuerpos con valor absoluto completos, si K es no trivial, y si L es localmente compacto, entonces L/K es finita.

13. Sea L una extensión cuadrática de $\mathbb{Q}_p$.

    (a) Asuma que existe un elemento α en $\mathcal{O}_L$ tal que $\alpha \equiv n \pmod{m_L}$ es falsa para todo $n \in \mathbb{Z}_p$. Probar que $L/\mathbb{Q}_p$ es no ramificada.

    (b) Asuma que para todo elemento α en $\mathcal{O}_L$ existe $n \in \mathbb{Z}_p$ tal que $\alpha \equiv n \pmod{m_L}$. Probar que $L/\mathbb{Q}_p$ es ramificada. **Sugerencia:** en caso contrario, p debe ser un parámetro uniformizante, por lo que cada elemento tiene una expansión del tipo $\sum_i a_i p^i$.

14. Sea $\{\omega_1, \omega_2\}$ una base de una extensión cuadrática L de $\mathbb{Q}_p$, y sea ρ una extensión del valor absoluto p-ádico a L. Probar directamente que si $\alpha_n = a_n\omega_1 + b_n\omega_2$ converge a 0 entonces lo mismo ocurre con a_n y b_n.

15. Demuestre que el valor absoluto de $\mathbb{Q}_p$ se extiende de manera única a la clausura algebraica A_p de $\mathbb{Q}_p$. Probar que A_p no es completo. Si $\mathbb{C}_p$ es el completado de A_p, probar que $\mathbb{C}_p$ es algebraicamente cerrado.

16. Calcule el radio de convergencia del logaritmo p-ádico en $\mathbb{C}_p$.

17. Cual es la imagen del valor absoluto de $\mathbb{C}_p$? Asume que este está normalizado de modo que $|p|_p = \frac{1}{p}$.

****
****