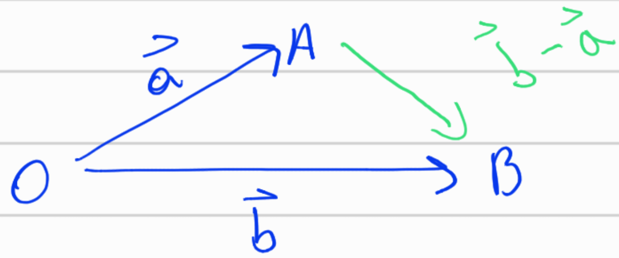
Ayudantía AyG

5/11/2021

1.- Contenidos

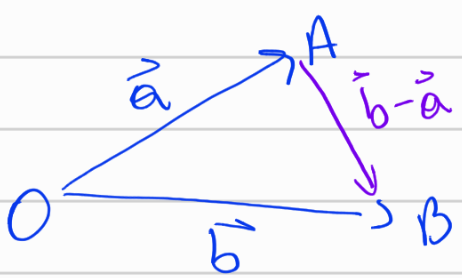
1.1.- Ecuación vectorial de la recta.

Sean O, A y B puntos como se muestra:

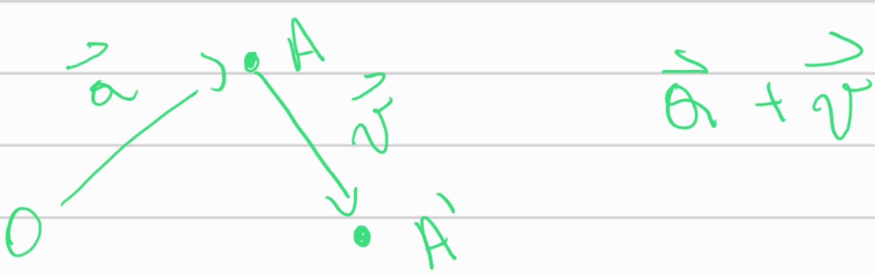


Con $\vec{a}$ el vector de O a A, análogo para $\vec{b}$.

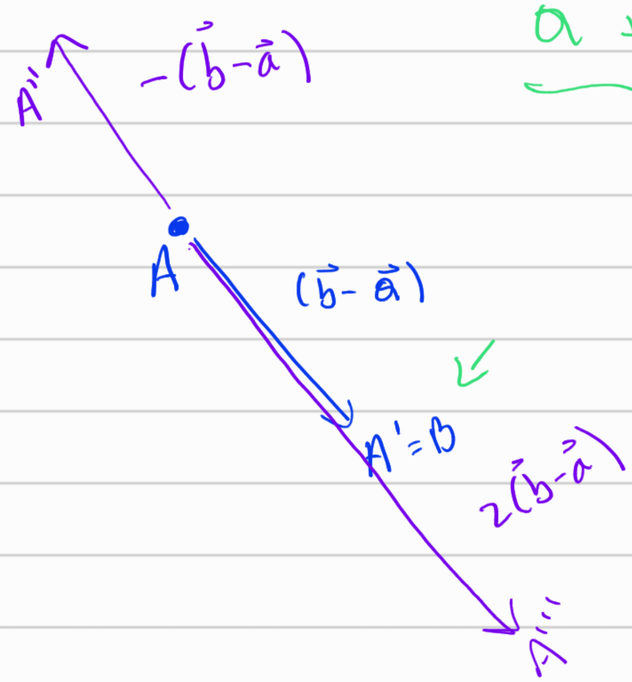
Si operamos $\vec{b}-\vec{a}$ obtenemos un vector que está en la recta que pasa por A y B.



Si tomo $\vec{a}$ y sumo $r(\vec{b}-\vec{a})$ obtengo traslaciones de A,



$a + (\vec{b} - \vec{a})$



así, con la siguiente expresión:

$$\vec{p} = \vec{a} + r(\vec{b} - \vec{a})$$

obtengo las coordenadas de cualquie punto P colineal a A y B.

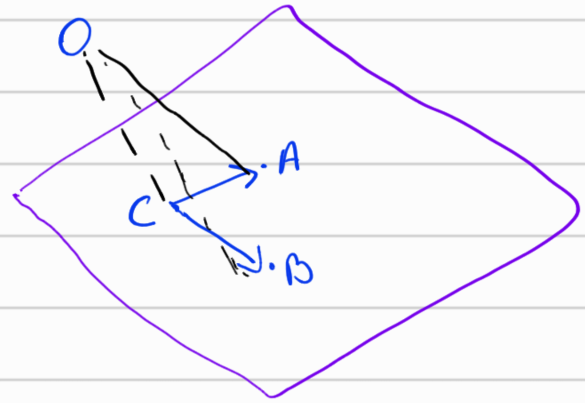
Finalmente:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ecuación vectorial de recta que pasa por A y B} \\ L : \{\vec{p} \in \mathbb{R}^3 : \vec{p} = \vec{a} + r\underbrace{(\vec{b} - \vec{a})}_{\text{vector director}} \text{ con } r \in \mathbb{R}\}\end{array}}$$

↳ vale para $\mathbb{R}^2$

1.2.- Ecuación vectorial del plano

Sean A, B y C puntos no colineales en un plano, y O el origen.

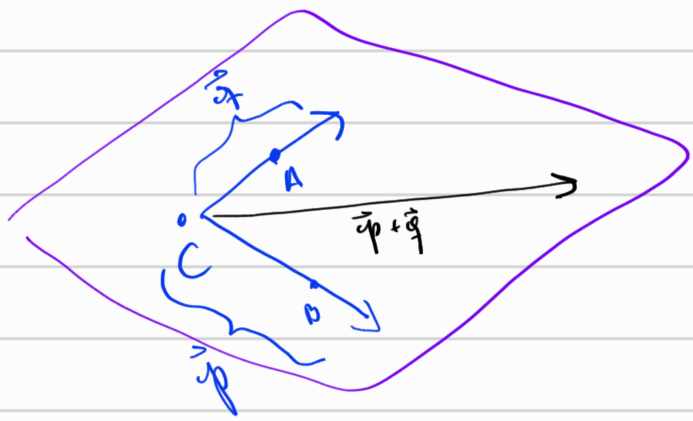


Con la ec. vectorial de la recta tenemos 2 expresiones

$\vec{p} = \vec{c} + \lambda(\vec{b} - \vec{c}) \quad / \lambda \in \mathbb{R}$ Recta por C y B

$q = \vec{c} + \mu(\vec{a} - \vec{c}) \quad / \mu \in \mathbb{R}$ Recta por C y A.

Si sumamos $\vec{p} + \vec{q}$ obtendremos cualquier punto del plano



así, todo punto H del plano queda dado por

$$\vec{h} = 2\vec{c} + \lambda(\vec{b}-\vec{c}) + M(\vec{a}-\vec{c})$$

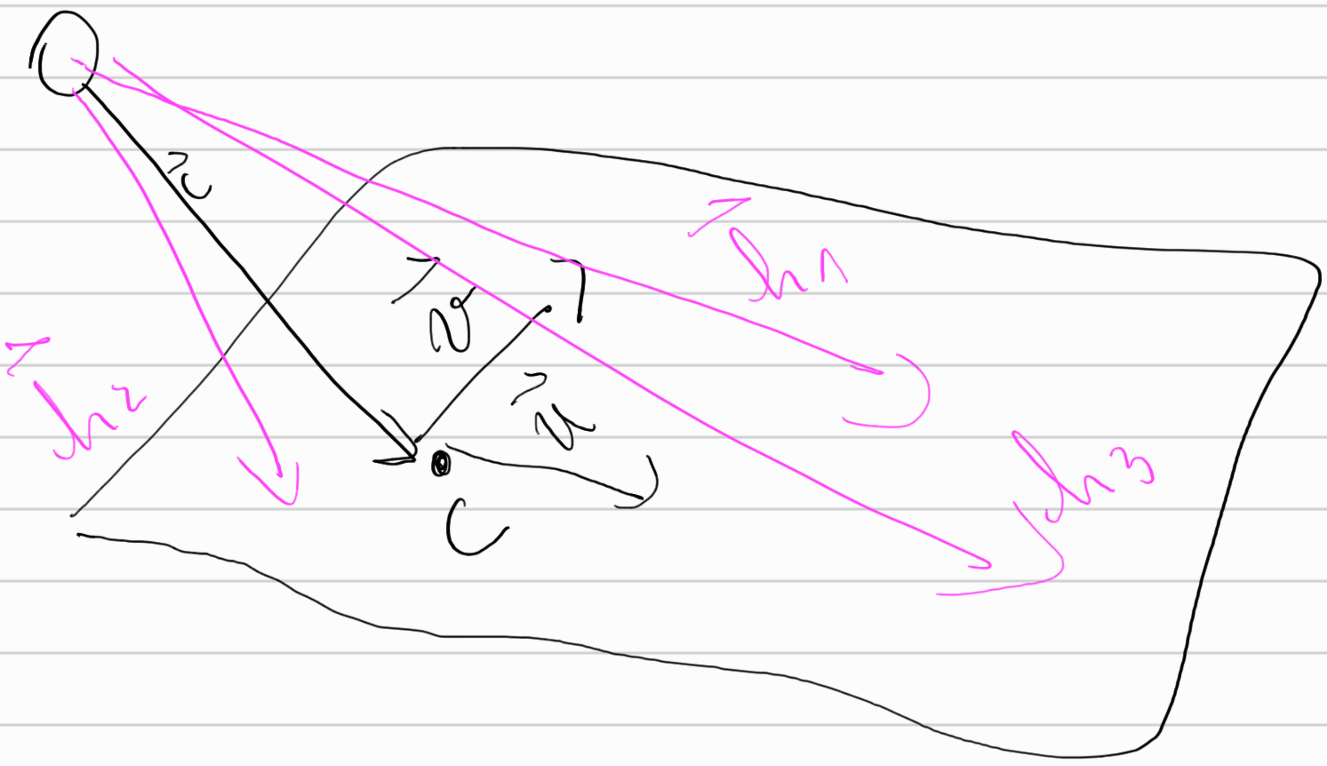
Con $2\vec{c} = \vec{c}'$, $(\vec{b}-\vec{c}) = \vec{v}$ y $(\vec{a}-\vec{c}) = \vec{u}$

la ec. vectorial queda dada por

$$L: \vec{h} = \vec{c}' + \lambda\vec{v} + \lambda\vec{u}$$

Vectores directores

Con $\vec{v}$ y $\vec{u}$ no colineales ni paralelos

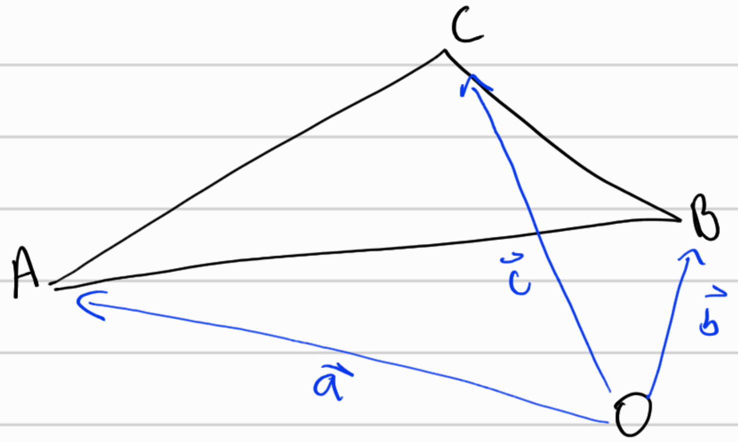


En general para un plano por A, B y C:

$$L: \vec{c} + \lambda(\vec{b}-\vec{c}) + \delta(\vec{a}-\vec{c}) \qquad \lambda, \delta \in \mathbb{R}$$

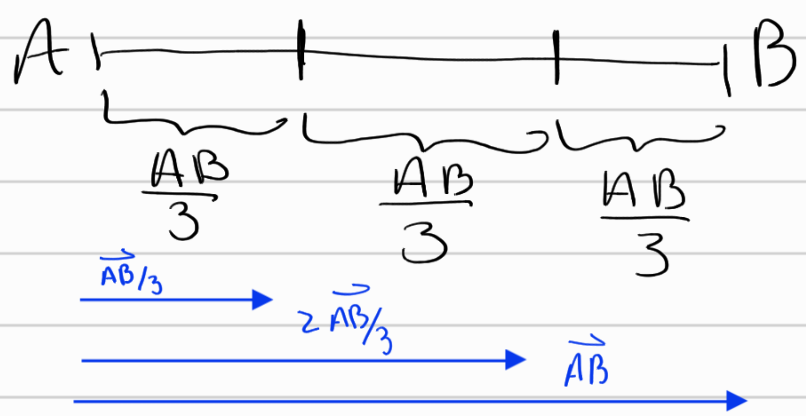
2.- Ejercicios

2.1.- Sea ΔABC cuyos vertices vienen dados por $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

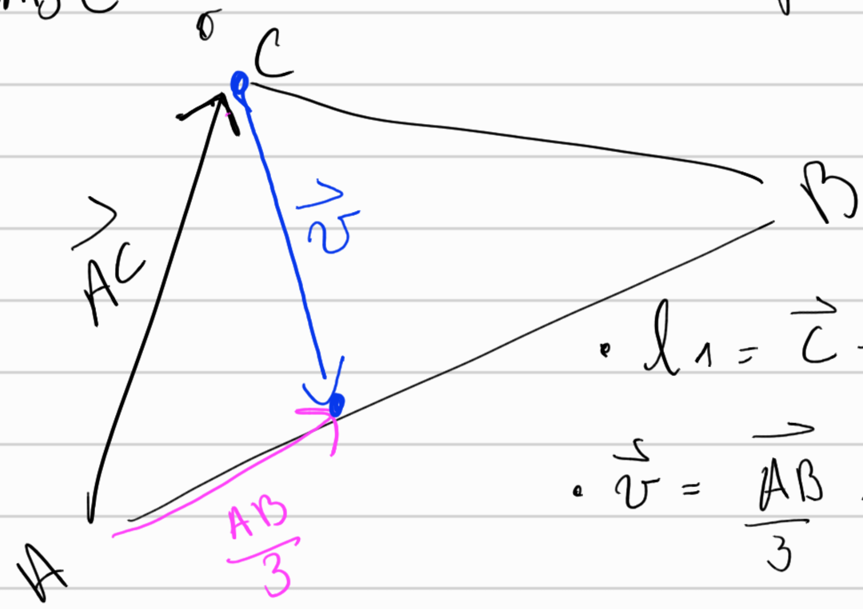


Escriba las ecuaciones vectoriales de 2 rectas que intersecten a AB de tal manera de trisectar dicho segmento. Las rectas deben pasar por C.

Des/ Consideremos el segmento AB



El vector director $\vec{v}$ se puede hallar en el $\triangle ABC$



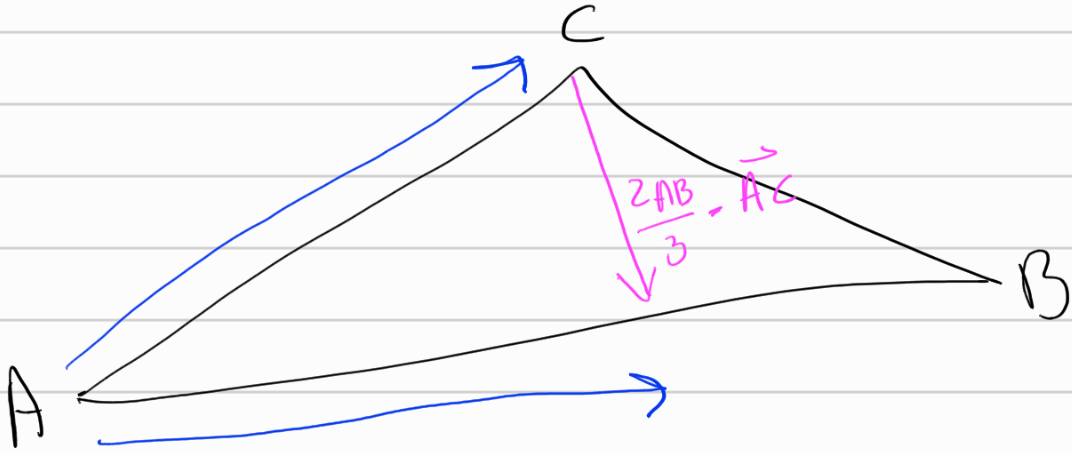
• $l_1 = \vec{C} + k_1 \vec{v}$

• $\vec{v} = \frac{\vec{AB}}{3} - \vec{AC}$

Así, $l_1 : \vec{C} + k_1\left(\frac{\vec{AB}}{3} - \vec{AC}\right) \quad k_1 \in \mathbb{R}$

Análogamente,

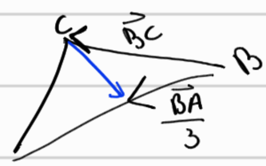
$$l_2 : \vec{C} + k_2\left(\frac{2\vec{AB}}{3} - \vec{AC}\right) \quad k_2 \in \mathbb{R}$$



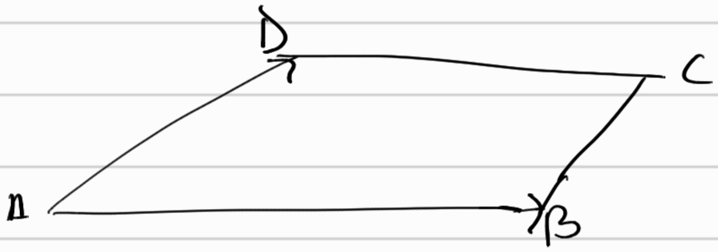
Bonos:

También puede ser

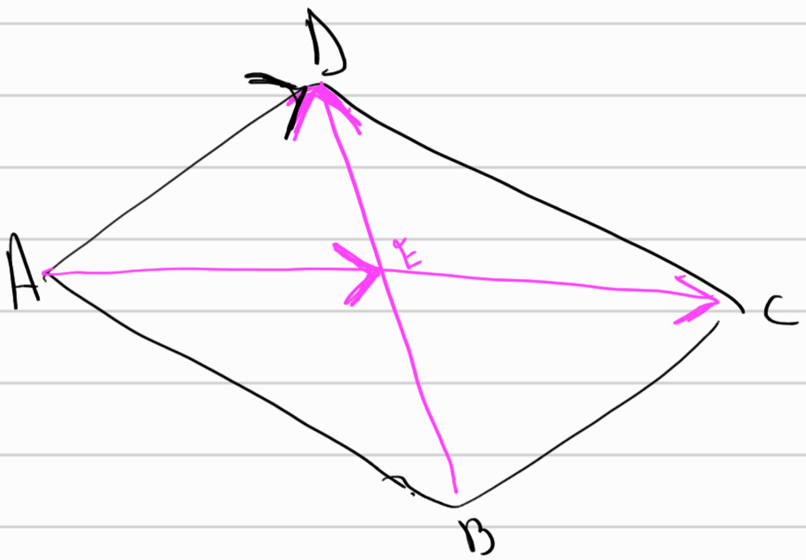
$$l_2 : \vec{C} + k_3\left(\frac{\vec{BA}}{3} - \vec{BC}\right)$$



2.2 Demuestre vectorialmente que las diagonales de un paralelogramo se dividen



Dem

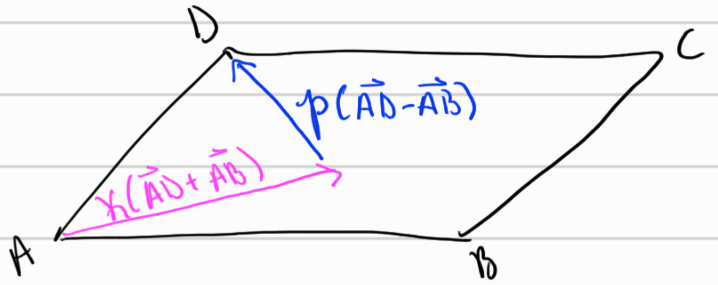


Geometricamente,

$$\vec{AE} + \vec{ED} = \vec{AD} \qquad (1)$$

Por otro lado, existen λ y μ tales que,

$$k(\vec{AD}+\vec{AB}) + p(\vec{AD}-\vec{AB}) = \vec{AD} \quad (2)$$



Con (2),

$$\vec{0} = k\vec{AD} + k\vec{AB} + p\vec{AD} - p\vec{AB} - \vec{AD}$$
$$= \vec{AD}(k+p-1) + (k-p)\vec{AB} \quad (3)$$

Si $\vec{AD} \parallel \vec{AB}$ entonces (3) se resuelve con k y p tales que $(k+p-1) = -(k-p)$. Sin embargo, este no es el caso pues $\vec{AD}$ no es paralelo a $\vec{AB}$.

$\therefore$ la única opción es k y p tales que el siguiente sistema se cumple:

$$\begin{cases} k+p-1=0 \\ k-p=0 \end{cases}$$

resolviendo se tiene $k=p=\frac{1}{2}$. Con esto en (2),

$$\frac{1}{2}(\vec{AD}+\vec{AB}) + \frac{1}{2}(\vec{AD}-\vec{AB}) = \vec{AD} \quad (4)$$

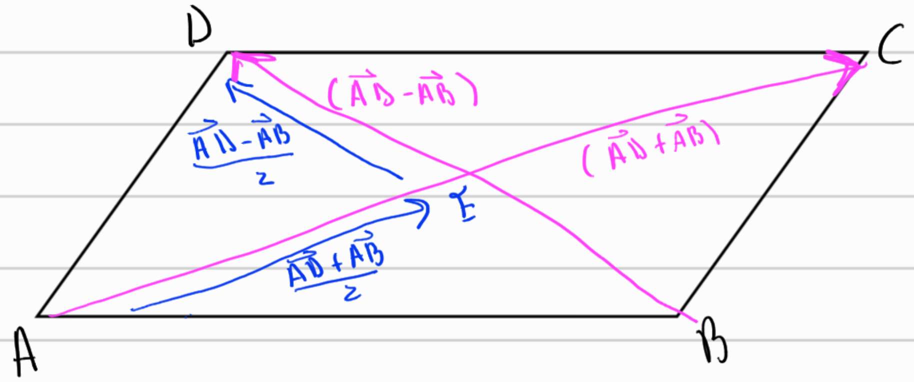
Con (4) y (1)

$$\vec{AI} + \vec{ID} = \frac{1}{2}(\vec{AD}+\vec{AB}) + \frac{1}{2}(\vec{AD}-\vec{AB}) \quad (5)$$

Como $AE \parallel (\vec{AD}+\vec{AB})$ y $\vec{ED} \parallel (\vec{AD}-\vec{AB})$ entonces la unica opción para que se cumpla (5) es,

$$\vec{AE} = \frac{1}{2}(\vec{AD}+\vec{AB}) \quad \wedge \quad \vec{ED} = \frac{1}{2}(\vec{AD}-\vec{AB})$$

Geometricamente



$\therefore$ las diagonales de un paralelogramo se dimidian. $\blacksquare$