Vale M.

AYUDANTÍA GEOMETRÍA

05 ABR 2021

PROBLEMA 1

Visualice mediante papel que:

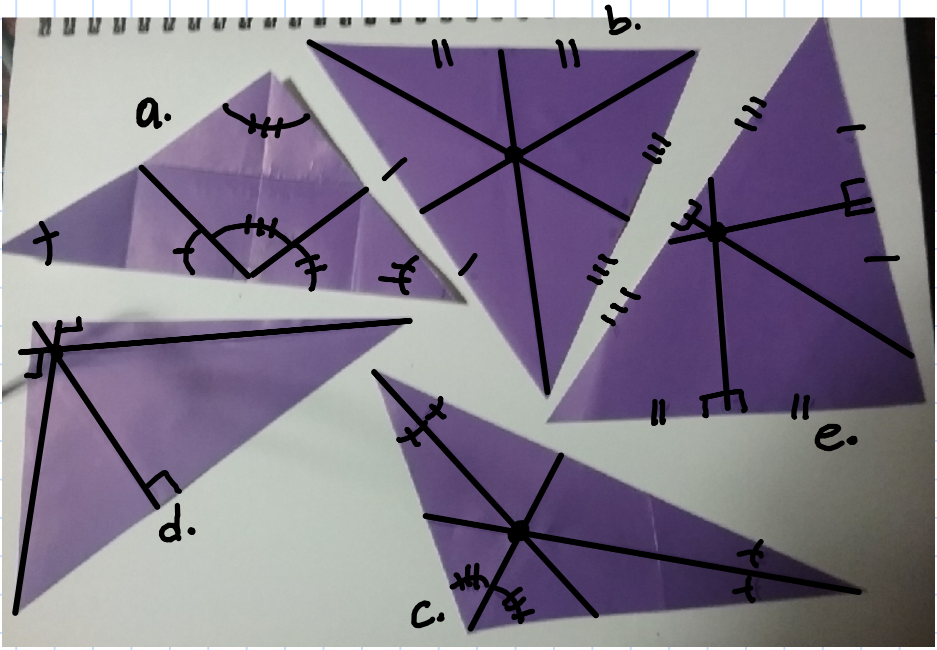
a. Los ángulos internos de un triángulo cualquiera suman 2R

b. Las transversales de gravedad/medianas de un triángulo cualquiera se intersectan en un punto (baricentro)

c. Las bisectrices de un triángulo cualquiera se intersectan en un punto (incentro)

d. Las alturas se intersectan en un punto (ortocentro)

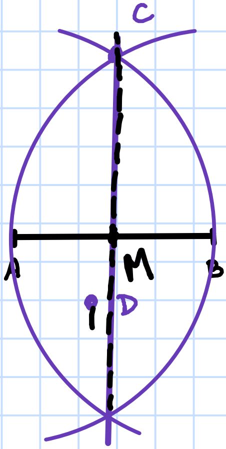
e. Las simetrales/mediatrices se intersectan en un punto (circuncentro)



PROBLEMA 2

(Prueba 1 2020) ¿Cuándo una recta l se dice simetral de un segmento AB? Indique como se construye y como se caracteriza como lugar geométrico

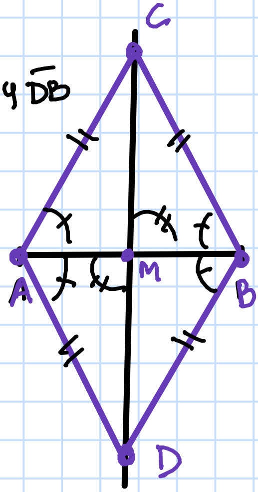
Una recta ℓ e una SIMETRAL de $\overline{AB}$ si esta recta pasa por el punto medio de $\overline{AB}$ y es perpendicular a este segmento



Para construirla debemos primeramente encontrar el punto medio M de $\overline{AB}$, trazamos 2 circunferencias de radio $\overline{AB}$ una con centro en A y otra con centro en B, obteniendo los puntos C y D

Al trazar la recta $\overline{CD}$ esta cortará a $\overline{AB}$ en M, para probar que la proyección de $\overline{CD}$ es simetral probaremos que

PD$_1$ / M punto medio



Trazamos las rectas $\overline{CA}$, $\overline{CB}$, $\overline{DA}$ y $\overline{DB}$ (todas iguales por ser parte de Δ'os equiláteros)

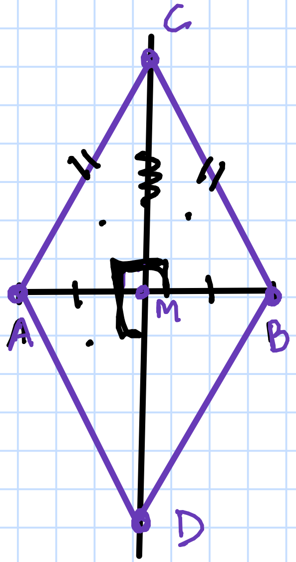
a. $\Delta ADM \cong \Delta ACM$ (LAL)

- $\overline{CA} \cong \overline{DA}$ (ΔABC y ΔADB equiláteros)
- $\measuredangle CAM \cong \measuredangle DAM$ (" " ")
- $\overline{AM} = \overline{AM}$ (mismo lado)

b. $\Delta AMD \cong \Delta CMB$ (ALA)

- $\measuredangle AMD \cong \measuredangle CMB$ (op por el vértice)
- $\overline{CM} \cong \overline{DM}$ (por a)
- $\measuredangle MDA \cong BCM$ ($\measuredangle$'os interos $\Delta = 2R$

$\Rightarrow$ en particular $\overline{AM} \cong \overline{BM}$ $\therefore$ M punto medio $\overline{AB}$



PD2] $\measuredangle$ AMC recto (sirve cualquiera)
(i.e. $\measuredangle AMC \cong \measuredangle BMC$)

$\triangle AMC \cong \triangle BMC$ (LLL)

- $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ (por M pto medio
- $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ (equilatero
- $\overline{CM} \cong \overline{CM}$ (mismo lado)

$\Rightarrow$ en particular

$\measuredangle AMC \cong \measuredangle BMC$

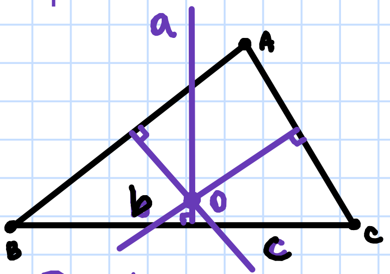
$\Rightarrow$ $\measuredangle AMC$ es recto
(porque es igual a su suplementario)

$\therefore$ Por PD1] y PD2] la proyección de $\overline{CD}$ es el ℓ que buscábamos, la simetral.

$\square$

PROBLEMA 3

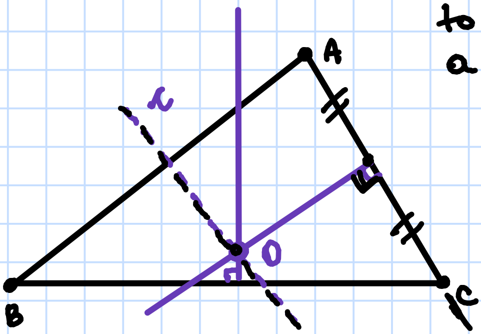
(Guía profe) Demuestre que las simetrales de lados de un triángulo, son rectas que concurren a un punto.
Demuestre también que ese punto es el único punto que equidista de los vértices del triángulo



Sea un ΔABC cualquiera
(spg. asumir acutángulo)

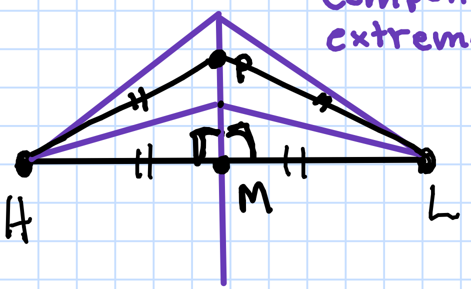
PD 1) Las simetrales concurren en un punto (circuncentro)

Sabemos que 2 rectas (no paralelas) deben concurrir en un punto (postulado 5), tomemos spg, las simetrals a y b concurren en O



Queremos mostrar que c tambien pase por O

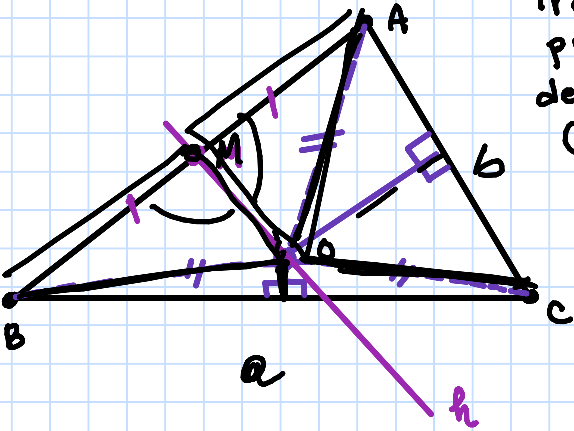
Lema 1) Para un segmento $\overline{HL}$ cualquiera, su simetral cumple la propiedad de que todos los puntos que la componen equidistan de los extremos de esta



DEM) por (LAL) $\Delta HMP \cong \Delta LMP$

- $\overline{HM} \cong \overline{LM}$ (por punto medio)
- $\measuredangle HMP \cong \measuredangle LMP$ (los 2 R)
- $\overline{PM} = \overline{PM}$ (mismo lado)

$\Rightarrow \overline{HP} \cong \overline{LP} \quad \forall P \in$ Simetral $\square$



Trazar la recta que pasa por M, el punto medio de $\overline{AB}$ y por O

↪ recta h

¿es h simetra?

Debemos mostrar $\measuredangle AMO \cong \measuredangle BMO$
como son sup.
$\Rightarrow$ son rectos

por el Lema 1, $\overline{BO} \cong \overline{CO}$ y $\overline{AO} \cong \overline{CO}$

luego por principio general (transitividad),

$\Rightarrow \overline{BO} \cong \overline{AO}$

$\Rightarrow \triangle BOM \cong \triangle AOM$ (LLL)

- $\overline{BO} \cong \overline{AO}$ (lema 1)
- $\overline{BM} \cong \overline{AM}$ (M punto medio)
- $\overline{OM} \cong \overline{OM}$ (mismo segmento)

suplementarios

$\Rightarrow$ en particular $\measuredangle AMO \cong \measuredangle BMO \Rightarrow \measuredangle AMO$ es recto

$\Rightarrow$ La proyección de $\overline{MO}$ es la simetral de $\overline{AB}$ (porque pasa por M y es $\perp$)

$\therefore$ Las simetrales de un $\triangle$ concurren en un punto $\square$

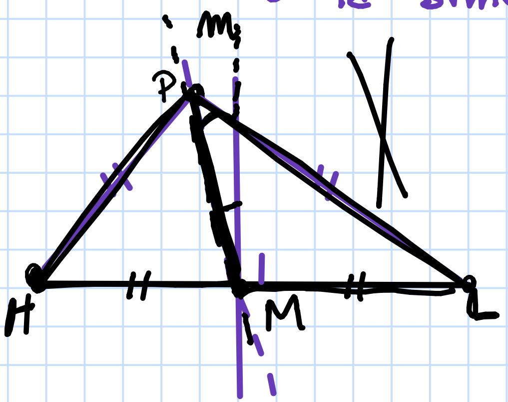
PD₂| Es el único punto que equidista de los vértices del triángulo

Primero, es fácil notar que O equidista de los vértices, por lema 1

Veamos otro lemita para ver que es el único

Lema 2| Recíproco del Lema 1

"Si un punto equidista de los extremos de un segmento, entonces dicho punto pertenece a la simetral



$\overline{HP} \cong \overline{PL}$ equidistan

m simetral

PD| $\overline{PM} \in m$

↳ $P \in m$

$\boxed{\text{ie. } \measuredangle PMH \text{ Recto}}$

↳ si no lo fuera habría un entre $\overline{PM}$ y m

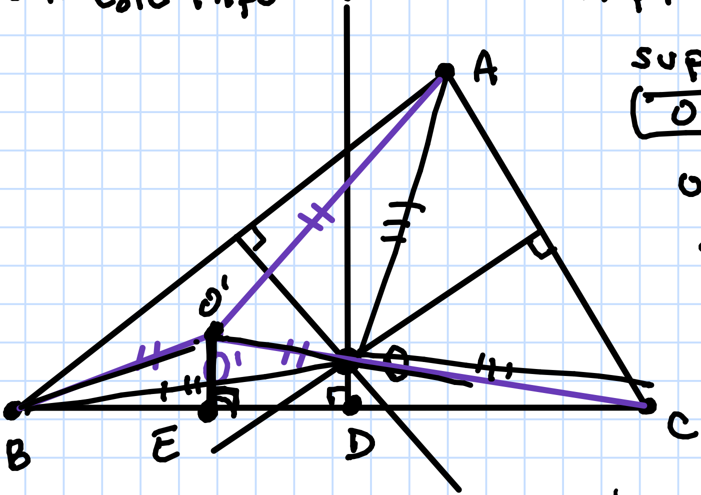
$\triangle PMH \cong \triangle PML$ (LLL)

- $\overline{HM} \cong LM$ (por M punto medio
- $\overline{HP} \cong \overline{PL}$ (por hipótesis)
- $\overline{PM} \cong \overline{PM}$ (mismo segmento

$\Rightarrow \measuredangle HMP \cong \measuredangle LMP$ y como son suple.

$\Rightarrow \measuredangle PMH$ es recto $\square$

Con esta info. volvemos al problema



supongamos existe $\boxed{O' \neq O}$ tal que O' equidista de los vértices

Trazamos la altura en O' del $\Delta BO'C$, como $\overline{BO'} = \overline{O'C}$, por Lema 2 $\overline{O'E}$ es simetral (pues por hipótesis equidista de B y C y es $\perp$ por construcción)

Pero $\overline{OD}$ ya era la simetral del lado $\overline{BC}$

$\Rightarrow \overline{O'E} = \overline{OD}$ (si se quiere $O' = O$ $\times$)

(analogamente los otros 2 casos)

$\therefore$ existe un único punto que equidista de los vértices de un Δ, y ese punto es O (circuncentro)

$\square$

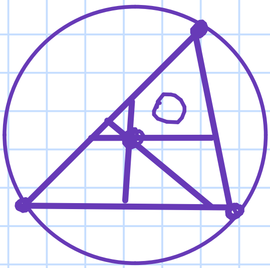
Demostrar por congruencia de Δ'os

ejercicio

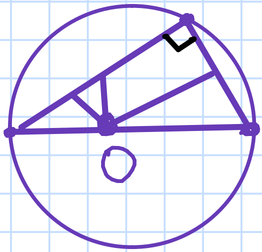
OJO !

Notemos que el circuncentro se llama así pues es el centro de una circunferencia

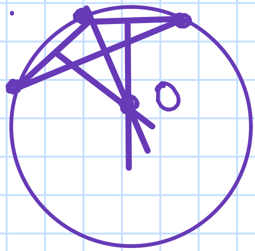
Dependiendo de cómo es el Δ esta se verá como



Acutángulo



Rectángulo



Obtusángulo