Ejercicios con Método de Coeficientes Indeterminados

miércoles, 11 de noviembre de 2020 08:27

Consideremos entonces la ecuación

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = \underbrace{e^{r_1 x}(P_1(x)\cos(q_1 x) + Q_1(x)\operatorname{sen}(q_1 x))}_{f_1} + f_2 \quad (4.20)$$

$$f_2 = e^{r_2 x}(P_2 \cos q_2 x + Q_2 \operatorname{sen} q_2 x)$$

donde a_0, a_1, a_2, r y q son constantes reales, $a_0 \neq 0$, y $P(x), Q(x)$ son polinomios.

Teorema 4.3.25 *Sea* $n = \max\{gradoP, gradoQ\}$.

$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0$

a) Si $r \pm iq$ *no es raíz de la ecuación característica (4.19), entonces la ecuación (4.20) tiene solución particular de la forma*

$$y_p(x) = e^{rx}(R_n(x)\cos(qx) + S_n(x)sen(qx)).$$

donde $R_n(x), S_n(x)$ *son polinomios de grado* n.

b) Si $r \pm iq$ *es raíz de multiplicidad* α *de (4.19), entonces la ecuación (4.20) tiene solución particular de la forma*

$$y_p(x) = x^\alpha e^{rx}(R_n(x)\cos(qx) + S_n(x)sen(qx)).$$

donde $R_n(x), S_n(x)$ *son polinomios de grado* n.

En cada caso los coeficientes de los polinomios $R_n(x), S_n(x)$ *se calculan reemplazando* $y_p(x)$ *en la ecuación.*

OBSERVACIÓN

2) Si y_i es solución de $L[y] = f_i(x)$, para $i = 1, \ldots, n$, entonces $y(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i(x)$ es solución de $L[y] = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x)$, donde α_i, $i = 1, \ldots, n$, son constantes.

Ejercicios:

(1) Encuentre una sol. particular de

$$y'' + 4y' + 5y = 2e^{3x} \quad (a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1)$$

1°) $\boxed{\text{Raíces del Polinomio Característico}}$ $a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0$

$$k^2 + 4k + 5 = 0$$

$$k = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(5)}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} \to \boxed{k = -2 + i}, \ \boxed{k = -2 - i}$$

2°) $\boxed{r \pm iq}$ $\quad \beta + i\pi$

$$f(x) = 2e^{3x}$$

$$\to a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = \underbrace{e^{rx}\left(P\cos(qx) + Q\,\mathrm{sen}(qx)\right)}_{f(x)}$$

$$y'' + 4y' + 5y = 2e^{3x}$$

$$= e^{3x}(2)$$

$$= e^{3x}\left(\underset{=p}{2}\cos(0x) + \overset{Q}{\underset{\shortparallel}{0}}\cdot \operatorname{sen}(0x)\right)$$

$r = 3 \qquad q = 0$

De 1° y 2° ¿ $r \pm iq = 3$ es raíz de $k^2 + 4k + 5 = 0$?

¡No es! Como no es, la solución es la parte a) del Teo 4.3.25

$$y_p = e^{rx}\left(R_n(x)\cos(qx) + S_n(x)\operatorname{sen}(qx)\right),$$

donde $n = \max\{gr\{P(x)\}, gr\{Q(x)\}\}$.

3°) Ver cómo es tal solución.

$$n = \max\{gr\{2\}, gr(0)\}$$

$$\boxed{n = 0}$$

$$R_n(x) = A$$
$$S_n(x) = B$$

constantes, o polinomio de grado cero.

$$y_p = e^{3x}\left(A\cos(0\cdot x) + B\,\mathrm{sen}(0\cdot x)\right)$$

$$\boxed{y_p = A e^{3x}}$$

4º) Buscar las incógnitas de la solución particular.

$$y'' + 4y' + 5y = 2e^{3x} . \quad (*)$$

Si $y_p = Ae^{3x}$ es solución $\Rightarrow$ debe valer $(*)$

$$y_p' = 3Ae^{3x} \qquad y_p'' = 9Ae^{3x}$$

Reemplazando en $(*)$,

$$9Ae^{3x} + 4(3Ae^{3x}) + 5(Ae^{3x}) = 2e^{3x}$$

$$26Ae^{\cancel{3x}} = 2e^{\cancel{3x}}$$

$26A = 2$

$$A = 2/26 \Rightarrow \boxed{1/13 = A}$$

Así la solución particular es

$$\boxed{y_p = \frac{1}{13} e^{3x}}$$

(2) Encuentre la solución particular de

$$y'' + 5y' + 4y = \underbrace{3 + 8x^2}_{f_1} + \underbrace{2\cos 2x}_{f_2}$$

1°/ Raíces del P. característico: $k^2 + 5k + 4 = 0 \Rightarrow (k+4)(k+1) = 0$

$\Rightarrow \boxed{k=-4} \; \boxed{k=-1}$

$2^{o})$ $r \pm iq$:

Aquí la parte No homogénea tiene dos funciones de la forma $\boxed{e^{rx}(P \cos qx + Q \operatorname{sen} qx)}$

Es por eso que buscaremos soluciones para f_1 y f_2.

$$\star \quad f_1 = 3+8x^2 = e^{0x}\left((3+8x^2)\cos(0x) + 0 \cdot \operatorname{Sen}(0x)\right)$$

$$\Rightarrow \quad r=0 \quad y \quad q=0$$

$$\therefore r \pm qi = 0 \text{ no es raíz.}$$

Así $y_{p_1} = e^{rx}\left(R_n \cos(qx) + S_n \operatorname{sen}(qx)\right)$.

donde $n = \max\{gr(3+8x^2), gr(0)\}$

$$\boxed{n = 2}$$

$$\therefore \quad y_{p_1} = e^{0x}\left[(Ax^2+Bx+C)\cos(0x) + (A'x^2+B'x+C')\operatorname{sen} 0x\right]$$

$$\boxed{y_{p_1} = A_1x^2 + B_1x + C_1}$$

$$* \quad f_2 = 2\cos 2x = e^{0x}\left[\underbrace{2}_{P(x)}\cdot\cos 2x + \underbrace{0}_{Q(x)}\cdot\operatorname{sen} 2x\right]$$

$r = 0 \qquad q = 2$

$\Rightarrow$ si $r \pm iq = \pm 2i$ no es raiz de $k^2+5k+4=0$.

$\Rightarrow$ la solución es de la forma

$$y_{p_2} = e^{rx}\left(R_n \cos(qx) + S_n \operatorname{sen} qx \right)$$

$$n = \max\{ gr(2), gr(0) \} = 0$$

Así, $y_{p_2} = e^{0x}\left(A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x \right)$

$$\therefore\ y_{p_2} = A_2 \cos 2x + B_2 \operatorname{sen} 2x$$

3°) La forma de la solución particular

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

$$y_p = A_1 x^2 + B_1 x + C_1 + A_2 \cos 2x + B_2 \operatorname{sen} 2x$$

4°) Busca las incognitas de y_p.

Como y_p es solucion de

$$(*) \quad y'' + 5y' + 4y = 3 + 8x^2 + 2\cos 2x$$

debo reemplazar y_p para hallar A_1, B_1, C_1, A_2 y B_2.

$$y_p = A_1 x^2 + B_1 x + C_1 + A_2 \cos 2x + B_2 \operatorname{sen} 2x$$

$$y'_p = 2A_1 x + B_1 - 2A_2 \operatorname{sen} 2x + 2B_2 \cos 2x$$

$$y''_p = 2A_1 - 4A_2 \cos 2x - 4B_2 \operatorname{sen} 2x$$

Reemplazando en (∗)

$$2A_1 - \cancel{4A_2\cos 2x} - \cancel{4B_2 \operatorname{sen} 2x} + 10A_1 x + 5B_1 - 10A_2 \operatorname{sen} 2x + 10B_2 \cos 2x$$

$$+ 4A_2 x^2 + 4B_1 x + 4C_1 + \cancel{4A_2 \cos 2x} + \cancel{4B_2 \operatorname{sen} 2x}$$

$$= 3 + 8x^2 + 2\cos 2x .$$

$$(2A_1 + 5B_1 + 4C_1) + (10A_1 + 4B_1)x + (4A_2)x^2 + 10B_2\cos 2x - 10A_2 \operatorname{sen} 2x$$

$$= 3 + 0 \cdot x + 8x^2 + 2\cos 2x + 0 \cdot \operatorname{sen} 2x .$$

$$2A_1 + 5B_1 + 4C_1 = 3$$

$$10A_1 + 4B_1 = 0$$

$4A_1 = 8 \rightarrow A_1 = 2$

$10B_2 = 2 \rightarrow B_2 = 1/5$

$-10A_2 = 0 \rightarrow A_2 = 0$

$2 \cdot 2 + 5B_1 + 4C_1 = 3$

$10 \cdot 2 + 4B_1 = 0 \rightarrow \boxed{B_1 = -5}$

$4 + 5 \cdot (-5) + 4C_1 = 3 \rightarrow \boxed{C_1 = 6}$

$4 - 25 + 4C_1 = 3$

$y_p = A_1 x^2 + B_1 x + C_1 + A_2 \cos 2x + B_2 \operatorname{sen} 2x$

$y_p = 2x^2 - 5x + 6 + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 2x$

(B) Busque la solución particular de

$$y'' - y' - 6y = \underbrace{e^{-2x}}_{f_1} + \underbrace{2e^{-3x}}_{f_2}$$

1°) $k^2 - k - 6 = 0 \Rightarrow (k+2)(k-3) = 0 \Rightarrow \boxed{k=-2}\ \boxed{k=3}$

2°) $\underline{r \pm iq}$ $\quad f_1 = e^{-2x} = e^{-2x}\left[\underset{P}{1}\cdot\cos(0x) + \underset{Q}{0}\cdot\operatorname{sen}(0x)\right]$

$r = -2 \qquad q = 0$

$r \pm iq = -2$ es Raíz del p. característico de multiplicidad $\alpha = 1$.

$$\Rightarrow \quad y_{p_1} = x^{\alpha} e^{rx} \left[R_n \cos(\rho x) + S_n \operatorname{sen}(\rho x) \right]$$

donde $n = \max\{ gr(1), gr(0) \} = 0$

$P \qquad Q$

$$\Rightarrow R_n = A_1 \qquad S_n = B_1$$

Así $\quad y_{p_1} = x^1 e^{-2x} \left[A_1 \cancel{\cos(0x)} + \cancel{B_1 \operatorname{sen}(0x)} \right]$

$1 \qquad 0$

$$\boxed{y_{p_1} = A_1 x e^{-2x}}$$

$$f_2 = 2e^{-3x} = e^{-3x} \left[2 \cdot \cos 0x + 0 \cdot \operatorname{sen} 0x \right]$$

$r = -3 \quad \beta = 0 \quad , r \pm i\beta = -3$

no es raíz del p. característico.

$$\Rightarrow y_{p_2} = e^{rx}\left[R_n \cos(\beta x) + S_n \operatorname{sen}(\beta x)\right]$$

donde $n = \max\{gr(\cancel{2}), gr(0)\} = 0$

$R_n = A_2 \qquad S_n = B_2$

$$\boxed{y_{p_2} = A_2 e^{-3x}}$$

$$\therefore \; y_p = A_1 x e^{-2x} + A_2 e^{-3x}$$

$$y_p = A_1 e - 2A_1 x \cdot e - 3A_2 e$$

$$y''_p = -2A_1 e^{-2x} - 2A_1 e^{-2x} + 4A_1 x e^{-2x} + 9A_2 e^{-3x}$$

$$y''_p = -4A_1 e^{-2x} + 4A_1 x e^{-2x} + 9A_2 e^{-3x}$$

Remplazo en $\quad y'' - y' - 6y = e^{-2x} + 2e^{-3x}$

$$\underbrace{e^{-2x}(-4A_1 + 4A_1 x) + 9A_2 e^{-3x}}_{y''} \underbrace{- \left\{ e^{-2x}(A_1 - 2A_1 x) - 3A_2 e^{-3x} \right\}}_{-y'}$$

$$\underbrace{-6 \left\{ A_1 x e^{-2x} + A_2 e^{-3x} \right\}}_{-6y} = \underline{e}^{-2x} + 2\underline{e}^{-3x}$$

$$e^{-2x}\left[-4A_1 + \cancel{4A_1x} - A_1 + \cancel{2A_1x} - \cancel{6A_1x}\right] + e^{-3x}\left[9A_2 + 3A_2 - 6A_2\right] = e^{-2x} + 2e^{-3x}$$

$$e^{-2x}(-5A_1) + e^{-3x}(6A_2) = 1\cdot e^{-2x} + 2e^{-3x}$$

$$-5A_1 = 1 \longrightarrow A_1 = -1/5$$

$$6A_2 = 2 \longrightarrow A_2 = 1/3$$

$$Y = A\,x\,e^{-2x} + A\,e^{-3x}$$

$y_p = A_1 x e \quad + A_2 e$

$$\boxed{y_p = -\frac{x}{5} e^{-2x} + \frac{1}{3} e^{-3x}}$$