AYUDANTÍA 5

(Si te sientes chatx de la U, Ánimo!! el semestre ya acaba)
Abrazos para ti ♡.

• Recordemos que las EDOS homogéneas de 2do orden son de la forma :

$$\boxed{y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0} \quad (♡)$$

p_1 y p_2 continuas

Fórmula de Abel :

Si conocemos una solución $y_1(x)$ de (♡) podemos hallar $y_2(x)$ mediante :

$$\boxed{y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1(x)^2}\,dx} \quad (\because)$$

• Además, sabemos que la solución general la podemos escribir como :

$$\boxed{y(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)} \longrightarrow \text{Importante}$$

1) Escribir la solución general de la EDO

• $x(x-1)\,y'' - (2x-1)\,y' + 2y = 0 \quad / \cdot \frac{1}{x(x-1)}$, donde $y_1(x) = x^2$

Reordenamos la EDO :

$$y'' - \underbrace{\frac{(2x-1)}{x(x-1)}}_{p_1(x)\,*}\,y' + \underbrace{\frac{2}{x(x-1)}}_{p_2(x)}\,y = 0.$$

$$\bullet \; -\int p_1(x)\,dx = -\int \frac{-(2x-1)}{x(x-1)}\,dx = \int \frac{(2x-1)}{\underbrace{x(x-1)}_{*}}\,dx$$

Usaremos fracciones parciales:

$$* = \frac{2x-1}{x(x-1)} = \boxed{\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} \Rightarrow$$

$$1x-1+Bx = 2x-1$$

$$Ax - A + Bx = 2x - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} A = 1 \\ B = 1 \end{array}}$$

Reescribimos $*$; volviendo a lo anterior:

$$\int \frac{2x-1}{x(x-1)} = \int \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right] dx = \ln(x) + \ln(x-1)$$

$$= \ln\left(x(x-1)\right) \quad \checkmark\checkmark$$

$\bullet$ Sabemos que $-\int p_1(x)\,dx = \ln(x(x-1))$

$$\bullet \; e^{-\int p_1(x)\,dx} = e^{\ln(x(x-1))} = x(x-1) \quad \checkmark\checkmark$$

Reemplazamos en la fórmula de Abel:

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{x(x-1)}{y_1(x)^2}\,dx \quad , \text{ recordemos } y_1(x) = x^2$$

$$\Rightarrow \; y_2(x) = x^2 \int \frac{x(x-1)}{x^4}\,dx$$

$$= x^2 \int \frac{x-1}{x^3}\, dx$$

$$= x^2 \left[\int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^3} dx \right]$$

$$\int x^{-3} = \frac{x^{-3+1}}{-3+1}$$

$$= \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2x^2}$$

$$y_2(x) = x^2 \left[\frac{-1}{x} + \frac{1}{2x^2} \right]$$

$$\boxed{y_2(x) = -x + \frac{1}{2}}$$ ✓✓

Por lo tanto, la solución general está dada por:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = C_1 x^2 + C_2 \left(-x + \frac{1}{2}\right)}$$ ✓✓

• EDOs de 2do orden homogéneas con coef. ctes.

Recordemos que son de la forma:

$a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow \boxed{a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0} \quad (\star)$$

Llamamos ecuación característica asociada a $(\star)$ a:

$$\boxed{a_0 K^2 + a_1 K + a_2 = 0}$$

Las raíces son:

$$K_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}$$

En donde:

$$\boxed{\det = a_1^2 - 4a_0 a_2}$$

Tenemos 3 casos posibles:

CASO 1: $\det > 0 \Rightarrow K_1, K_2 \in \mathbb{R}$, $K_1 \neq K_2$

La solución de la EDO es:

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{K_1 x} + C_2 e^{K_2 x}} \leftarrow$$

CASO 2: $\det = 0 \Rightarrow K_1, K_2 \in \mathbb{R}$, $K_1 = K_2$

La solución de la EDO es:

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{K_1 x} + C_2 x e^{K_1 x}} \leftarrow$$

CASO 3: det $< 0 \Rightarrow K_1, K_2 \in \mathbb{C}$

$$K_1 = \alpha + i\beta$$
$$K_2 = \alpha - i\beta.$$

la solución es:

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha x}\left[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \operatorname{sen}(\beta x)\right]}$$

2) Obtener la solución general de:

$$y'' + 4y' + 13y = 0$$

Escribimos la ec. característica asociada:

$$\boxed{K^2 + 4K + 13 = 0}$$

Resolvemos la ec.

$$K_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2}$$

$$\Rightarrow K_{1,2} = -2 \pm 3i \quad \begin{cases} K_1 = 2 + 3i \\ K_2 = -2 - 3i \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = -2 \text{ (parte real)} \\ \beta = 3 \text{ (parte imag)} \end{array}$$

Notemos que estamos en el caso 3 :

$$y(x) = e^{\alpha x}\left[C_1 \operatorname{sen}(\beta x) + C_2 \cos(\beta x)\right]$$

$$\boxed{y(x) = e^{-2x}\left[C_1 \operatorname{sen}(3x) + C_2 \cos(3x)\right]}$$

Ecuación de Euler:

Tiene la forma:

$$\boxed{a_0 x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0}$$

bajo el cambio de variable $\boxed{x = e^t}$ llegamos a la ec. característica:

$$\boxed{a_0 K^2 + (a_1 - a_0)K + a_2 = 0}$$

Nuevamente tenemos 3 casos posibles:

CASO 1: $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$, $K_1 \neq K_2$

$$\boxed{y(x) = C_1 x^{K_1} + C_2 x^{K_2}}$$

CASO 2: $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$, $K_1 = K_2$

$$\boxed{y(x) = C_1 x^{K_1} + C_2 \ln(x)\, x^{K_1}}$$

CASO 3: $K_1, K_2 \in \mathbb{C}$. $\boxed{K_1 = \alpha + i\beta}$, $\boxed{K_2 = \alpha - i\beta.}$

$$\boxed{y(x) = x^{\alpha}\left[C_1 \cos(\beta \ln(x)) + C_2 \operatorname{sen}(\beta \ln(x))\right]}$$

3) Resolver el P.V.I:

$$4x^2 y'' - 8xy' + 9y = 0, \quad \boxed{\begin{array}{l} y(1) = 2 \\ y'(1) = 7. \end{array}}$$

Escribimos la ec. característica asociada a la EDO (Euler):

$$a_0K^2+(a_1-a_0)K+a_2=0$$

$a_0=4$ $\quad a_1=-8$ $\quad a_2=9$

$$\Rightarrow 4K^2+(-8-4)K+9=0$$

$$\Rightarrow 4K^2-12K+9=0$$

$$\Rightarrow (2K-3)^2=0$$

$\therefore K_1=K_2=\frac{3}{2}$ ✓✓ valores $\mathbb{R}$ e iguales.

Estamos en el caso 2) ; por lo tanto podemos escribir la solución como sigue:

$$y(x)=C_1x^K+C_2\ln(x)x^K$$

$$\Rightarrow y(x)=C_1x^{3/2}+C_2\ln(x)x^{3/2}$$ ✓✓

Con. inicial $y(1)=2$:

$$y(1)=C_1\cdot\overset{1}{\cancel{1^{3/2}}}+\overset{0}{\cancel{C_2\ln(1)}}\cdot 1^{3/2}$$

$$\boxed{2=C_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x)=2x^{3/2}+C_2\ln(x)x^{3/2}}$$

Cond. $y'(1)=7$

$$y'(x) = \cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} x^{1/2} + C_2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x^{3/2} + C_2 \ln(x) \cdot \frac{3}{2} x^{1/2}$$

$$y'(1) = 3 \cdot \overset{1}{\cancel{1^{1/2}}} + C_2 \cdot \cancel{\frac{1}{1} \cdot 1^{3/2}}^{\,1} + C_2 \overset{0}{\cancel{\ln(1)}} \cdot \frac{3}{2} \cdot 1^{1/2}$$

$$7 = 3 + C_2$$

$$\Rightarrow \boxed{C_2 = 4}$$

$$\therefore \boxed{y(x) = 2x^{3/2} + 4 \ln(x)\, x^{3/2}}$$