Edos de 2do orden (3)

miércoles, 11 de noviembre de 2020 08:27

2.2) Solución de EDOs lineales de 2° orden No Homogéneas

Métodos de solución

2.2.1) Método de variación de constantes ✓

2.2.2) ✓ Coeficientes indeterminados

EDO lineal de 2° orden no homogénea es de la forma

$$(1) \quad y'' + P_1(x)\, y' + P_2(x)\, y = f(x),$$

donde $P_1, P_2, f \in C^0(I)$

Usando el operador lineal (1) queda

$$L[y] = f(x) \qquad (2)$$

Obs

1. Si y_1 es solución de $L(y)=0$ y $\tilde{y}$ de $L(y)=f(x)$, entonces $y_1+\tilde{y}$ también es solución de $L(y)=f(x)$.

2. Sea $L(y)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ y sea

y_i la solución de $L(y) = f_i(x)$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces la cual

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \text{ es solución } L(y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

③ Supongo las funciones P_1, P_2, U, V reales, entonces si

$$L(y) = U(x) + iV(x)$$

tiene solución $y(x) = u(x) + iv(x)$, donde u, v son funciones reales, entonces

$u(x)$ es solución de $L(y) = u(x)$
y $v(x)$ es solución de $L(y) = v(x)$

Teorema (4.3.21) Consideremos

$L(y) = f(x)$, con $p_1, p_2, f \in C^0(I)$.

Si $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$ es solución general de $L(y) = 0$ y además $\tilde{y}$ es solución de $L(y) = f(x)$, entonces no solución general de $L(y) = f(x)$ es

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \tilde{y}(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ej: Sea $\tilde{y} = x$ solución de

$$\boxed{y'' + y = x},$$

hallar la solución general.

Solución de (general) $\quad y'' + y = 0$

$$K^2 + 1 = 0$$

$$k = \pm i \in \mathbb{C}$$

$$y(x) = e^{Re(k)x}\left[c_1 \cos(Im(k)x) + c_2 \operatorname{sen}(Im(k)x)\right]$$

$$\boxed{y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x}$$

Sol. general $y'' + y = 0$

Por Teorema, la sol general de

$$y'' + y = x$$

es

$$\boxed{y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x}$$

Métodos de Solución para
$L(y) = f(x)$

2.2.1 Método de Variación de Constantes

FORMULA

Suponga que $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ es la solución general de $L[y\ ] = 0$. Dado una función f continua sobre I, buscaremos una solución particular de $L[y\ ] = f(x)$ de la forma:

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)\,.$$

$$c_1'(x) = -\frac{f(x)y_2(x)}{W(x)} \quad \text{y} \quad c_2'(x) = \frac{f(x)y_1(x)}{W(x)}\,.$$

<u>Dem</u>: $y(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x)$

es sol. de $y'' + P_1 y' + P_2 y = f(x) \quad (*)$

esto es si reemplazo en $(*)$ me da $f(x)$.

$$y'(x) = \underline{C_1'(x)\, y_1(x)} + C_1(x)\, y_1'(x) + \underline{C_2'(x)\, y_2(x)} + C_2(x)\, y_2'(x)$$

Aquí, tomamos como hipótesis que

$$C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) \equiv 0 \quad (**)$$

$\Rightarrow$ $y'(x) = C_1(x)\, y_1'(x) + C_2(x)\, y_2'(x)$

$$y'(x) = c_1(x)\, y_1'(x) + c_2(x)\, y_2'(x)$$

$$y''(x) = c_1'(x)\, y_1'(x) + c_1(x)\, y_1''(x) + c_2'(x)\, y_2'(x) + c_2(x)\, y_2''(x)$$

Reemplazando en $(*)$ y usando $(**)$

$$f(x) = c_1'(x)\, y_1'(x) + c_2'(x)\, y_2'(x)$$

Así tenemos el siguiente sistema

$$c_1'(x)\, y_1(x) + c_2'(x)\, y_2(x) = 0$$

$$c_1'(x)\, y_1'(x) + c_2'(x)\, y_2'(x) = f'(x).$$

donde c_1', c_2' son incógnitas

observe que $\forall x \in I$, el determinante del sistema es el Wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

pues y_1, y_2 son sol l.i. $L(y) = 0$.

Por lo tanto

$$C_1'(x) = \frac{f(x)\, y_2(x)}{W(x)} \quad y$$

$$C_2'(x) = \frac{f(x)\, y_1(x)}{W(x)}$$

Luego las constantes son

$$C_1(x) = \int -\frac{f(x)\, y_2(x)}{W}\, dx$$

$$C_2(x) = \int \frac{f(x)\, y_1(x)}{W}\, dx$$

Ejemplo:

~~y_p~~ • Hallar una sol. particular de

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

1°) Ver Sol. de $L(y) = 0$

$$y'' + y = 0$$

$$y(x) = C_1 \underbrace{\cos x}_{y_1(x)} + C_2 \underbrace{\operatorname{sen} x}_{y_2(x)}$$

2°) Da la Sol particular de $L(y) = f(x)$ haciendo variación de constantes

$$\tilde{y}(x) = C_1(x) \cos x + C_2(x) \operatorname{sen} x$$

3° Buscar Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

4° Hallar $C_1(x)$ y $C_2(x)$ (que dependen de W)

$f(x) = 1/\cos x$

$$C_1(x) = \int -\frac{f(x)\, y_2(x)}{W}\, dx$$

$$C_1(x) = \int \frac{-1}{\cos x} \cdot \operatorname{sen} x \, dx$$

$u = \cos x$

$du = -\operatorname{sen} x \, dx$

$I_1 = +\int \frac{du}{u} = -\ln|u|$

$$\boxed{C_1(x) = + \ln|\cos x| + \bar{C}_1}$$

$$C_2(x) = \int \frac{f(x)\, y_1(x)}{W}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{\cancel{\cos x}} \cancel{\cos x}\, dx$$

$$\boxed{C_2(x) = x + \bar{C}_2}$$

Luego la solución particular de $L(y) = f(x)$

es

$$\tilde{y}(x) = (\ln|\cos x| + \tilde{c}_1)\cos x + (x + \tilde{c}_2)\operatorname{sen} x.$$

~~obs~~

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \tilde{y}$$ Sol. general.

② Halla la solución general de

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

$f(x)$

Sabiendo $y_1(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ es solución particular de la parte homogenea de esta.

cuación.

1°) Hallar Sol. general de $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$, donde $y_1 = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

$P_1(x)$

Por Abel

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \int \frac{e^{-\int P_1(x)\,dx}}{[y_1(x)]^2}\,dx$$

$$y_2(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \int \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot e^{-\int \frac{2}{x}dx}\,dx$$

$$y_2(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \int \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot e^{-2\ln x}\,dx$$

$$y_2(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \int \frac{\cancel{x^2}}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \cancel{x^{-2}} \, dx$$

$$y_2(x) = \frac{\operatorname{sen} \cancel{x}}{x} \cdot -\cot g x \qquad -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} \cancel{x}}$$

$$y_2(x) = -\frac{\cos x}{x}$$

Así la sol general de la parte Homogénea es

$$\boxed{y(x) = C_1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}}$$

2°) Expresa sol. partícula de la parte No Homogénea, que es la general de la Homogénea c/ varia de cts

$$\tilde{y}(x) = C_1(x)\frac{\operatorname{sen} x}{x} + C_2(x)\frac{\cos x}{x}$$

3°) Busca Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \frac{\cos x}{x} \\ \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} & \frac{-x\operatorname{sen} x - \cos x}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{-x\operatorname{sen}^2 x - \cancel{\operatorname{sen} x \cos x} - \left(x\cos^2 x - \cancel{\cos x \operatorname{sen} x}\right)}{x^3}$$

$$-x(\cancel{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x})^{1}$$

$$= -\cancel{x} \quad -\boxed{-1}$$

$$= \frac{\quad}{x^3 \cdot 2} = \boxed{\frac{\quad}{x^2}}$$

4°) Hallar $C_1(x)$ y $C_2(x)$ $\left(f(x) = 1/x \right)$

$$C_1(x) = +\int \frac{\cancel{1/x} \cdot \cos x \cancel{1/x}}{\cancel{1/x^2}}\, dx$$

$$C_1(x) = \int \cos x \, dx = \operatorname{Sen} x + \tilde{C}_1$$

$$C_2(x) = -\int \frac{\cancel{1/x} \cdot \operatorname{Sen} x \cancel{/x}}{\cancel{1/x^2}} = \cos x + \tilde{C}_2$$

$\therefore$ La Sol. particular de $L(y) = f(x)$

$$\tilde{y}(x) = (\operatorname{sen} x + \tilde{c}_1)\frac{\operatorname{sen} x}{x} + (\cos x + \tilde{c}_2)\frac{\cos x}{x}$$

$\boxed{5^{o}}$ Solución general de $L(y) = f(x)$

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \tilde{y}$$

$$y(x) = c_1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} + c_2 \frac{\cos x}{x} + (\operatorname{sen} x + \tilde{c}_1)\frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$+ (\cos x + \tilde{c}_2)\frac{\cos x}{x}$$

$$\therefore\; y(x) = (\operatorname{sen} x + C_1')\frac{\operatorname{sen} x}{x} + (\cos x + C_2')\frac{\cos x}{x}$$

$$y(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} + C_1'\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \frac{\cos^2 x}{x} + C_2'\frac{\cos x}{x}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{x} + C_1'\frac{\operatorname{sen} x}{x} + C_2'\frac{\cos x}{x}}$$

2.2.2) Métodos de coef indeterminados

Este método soluciona EDOs del tipo

(3) $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = \sum_{i=1}^{m} e^{r_i x}\left[\underline{P_i(x)}\cos(\bar{q}_i x) + \underline{\bar{Q}_i(x)}\,\mathrm{Sen}(q_i x)\right]$,

Los tipo no son c/coef. ctes.

donde a_0, a_1, a_2, r_i, q_i son constantes, $a_0 \neq 0$, y

P_i, Q_i son polinomios.

Ej: Ejemplos de ecuación tipo 3

$a_0 = 1$ $r = 3$

$a_1 = 4$ $q = 0$

$a_2 = 5$ $Q = 0$

$P = 2$

① $y'' + 4y' + 5y = 2e^{3x}$

② $y'' + 5y' + 4y = \underbrace{8x^2 + 3}_{} + \underbrace{2\cos(2x)}_{}$

$\to$ ux

$$e^{0x}\Big[\underbrace{(8x^2+3)\cos 0x + 0\cdot\mathrm{sen}\,0x}_{f_1}\Big] + \Big[\underbrace{2\cos 2x + 0\cdot\mathrm{sen}\,2x}_{f_2}\Big]e$$

$r_1 = 0$ $\quad q_1 = 0$ $\quad Q_1(x) = 0$ $\quad P_1(x) = 8x^2+3$

$n = \max(0, P) = 2$

$r_2 = 0$ $\quad q_2 = 2$ $\quad Q_2(x) = 0$ $\quad P_2(x) = 2$

$n = \max(\mathrm{gr}(0), \mathrm{gr}(2)) = 0$

EDO No Homog c/coef/ctes

Consideremos entonces la ecuación

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = e^{rx}(P(x)\cos(qx) + Q(x)\mathrm{sen}(qx)), \qquad (4.20)$$

donde a_0, a_1, a_2, r y q son constantes reales, $a_0 \neq 0$, y $P(x), Q(x)$ son polinomios.

Teorema 4.3.25 *Sea* $n = \max\{gradoP, gradoQ\}$.
a) Si $r \pm iq$ *no es raíz de la ecuación característica (4.19), entonces la ecuación*

(4.20) tiene solución particular de la forma

$$y_p(x) = e^{rx}(R_n(x)\cos(qx) + S_n(x)sen(qx))\,.$$

donde $R_n(x), S_n(x)$ *son polinomios de grado n.*
b) Si $r \pm iq$ *es raíz de multiplicidad* α *de (4.19), entonces la ecuación (4.20) tiene solución particular de la forma*

$$y_p(x) = x^{\alpha}e^{rx}(R_n(x)\cos(qx) + S_n(x)sen(qx))\,.$$

donde $R_n(x), S_n(x)$ *son polinomios de grado n.*

En cada caso los coeficientes de los polinomios $R_n(x), S_n(x)$ *se calculan reemplazando* $y_p(x)$ *en la ecuación.*