EDOS de 2° orden (3)

miércoles, 4 de noviembre de 2020 08:18

2.1 EDOs lineales homogeneas de 2° orden

$$\left(y'' + P_1(x) y' + P_2(x) y = 0 \right)$$

Teo Sea y_1, y_2 son soluciones l.i en Ω de

$$y'' + P_1 y' + P_2 y = 0 \quad (*)$$

con $P_1, P_2 \in C^0(\Omega)$. Entonces la solución general de esta EDO es $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Corolario El n° de soluciones l.i de

$$y'' + P_1 y' + P_2 y = 0$$

son dos.

Ej: Dar la solución general de

(1) $y'' - y = 0$

donde $y_1 = e^x$ e $y_2 = e^{-x}$.

$e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, k_1 \neq k_2$, son l.i

¿e^x, e^{-x} son l.i?

$c_1 e^x + c_2 e^{-x} = 0$

$c_1 e^x + \frac{c_2}{e^x} = 0$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

$\therefore e^x, e^{-x}$ son l.i ✓

Así su solución general es

$$\boxed{y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}},$$

Muchas veces, no me dan 2 sol. l.i de (*), si no que me dan sólo una sol. y uno debe buscar la 2° Sol. que tiene que ser l.i, para luego hallar su sol. general.

Formula de Abel

Si conocemos sólo una sol. particular de (*), digamos $y_1 \neq 0$, podemos encontrar la sol. y_2 tal que y_1, y_2 sean l.i, de la siguiente forma.

l.i.

La solución ~~general~~ es $y_2(x) = y_1 z$,

donde $z = \int u(x)\,dx$. Si $y_2(x) = y_1 z$ es

solución, debe valer $(*)$.

$$y_2(x) = y_1 \cdot z$$

$$y_2'(x) = y_1' z + y_1 \cdot z'$$

$$y_2''(x) = y_1'' z + 2 y_1' z' + y_1 z''$$

Reemplazando en $(*)$,

$$y_1'' z + 2 y_1' z' + y_1 z'' + p_1 (y_1' z + y_1 z') + p_2 y_1 z = 0$$

$$z\underbrace{(y_1'' + P_1 y_1' + P_2 y_1)}_{0} + z'(2y_1' + P_1 y_1) + y_1 z'' = 0$$

$$(**) \quad z'(2y_1' + P_1 y_1) + y_1 z'' = 0$$

Como $y = y_1 z$ $z = \int u(x)\,dx$ $z' = u(x) = u$

$z'' = u'$

Así $(**)$ queda

$$(2y_1' + P_1 y_1)u + y_1 u' = 0$$

$$u' y_1 = -(2y_1' + P_1 y_1)\, u$$

$$\frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{u} = \frac{-2y_1' - P_1 y_1}{y_1}$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{2y_1'}{y_1}\,dx - P_1\,dx \,/\int$$

$$u = e^{-\int \frac{2y_1'}{y_1}dx} \cdot e^{-\int P_1 dx}$$

$$u = (y_1)^{-2} \cdot e^{-\int P_1 dx}$$

$$\Rightarrow \quad z = \int u\,dx = \int \frac{e^{-\int P_1 dx}}{\quad} dx$$

$$\Rightarrow \boxed{y_2 = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P_1 dx}}{y_1^2}\, dx}$$

Formula de Abel.

obs: y_1, y_2 son l.i y $W(x) = e^{-\int P_1 dx} \neq 0$.

Ej Resolver $x^2 y'' - x y' + y = 0$ s.i.

$y_1 = x$ ✓

F. Abel $\quad y_2 = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int P_1 dx}}{y_1^2}\, dx$

$y_1 = x$

$y_1^2 = x^2$

$P_1 = -\frac{1}{x}$ ✓

$$\frac{x^2 y''}{x^2} - \frac{xy'}{x^2} + \frac{y}{x^2} = 0$$

$$e^{\ln x} \cdot e^{c}$$

$$y_2 = x \int \frac{e^{+\int \frac{1}{x} dx}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{\ln x + c}}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow y_2 = x e^{c_1} \int \frac{x}{x^2} dx$$

$$= x e^{c_1} (\ln x + c_2)$$

$$y_2 = x \underbrace{e^{c_1}}_{\tilde{c}_1} \ln x + x \underbrace{e^{c_1} c_2}_{\tilde{c}_2}$$

$$\boxed{y_2 = x(\tilde{C}_1 \ln x + \tilde{C}_2 x)}$$ Por Abel.

La Solución general

$$\boxed{y'' + P_1 y' + P_2 y = 0}$$

$\{y_1, y_2\}$ Abel

$$\rightarrow y(x) = a_1 y_1 + a_2 y_2 \qquad \boxed{y = c_1 y_1 + c_2 y_2}$$

$$y(x) = a_1 x + a_2 x(\tilde{C}_1 \ln x + \tilde{C}_2 x)$$

$$\boxed{y(x) = a_1 x + x(\tilde{\tilde{C}}_1 \ln x + \tilde{\tilde{C}}_2 x)}$$

(general).

2.1.1 Solución de EDO lineales homogéneas de 2° orden con coeficientes constantes

Considere la EDO

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad , \quad (***)$$

donde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Para esta EDO sugerimos que una solución es $y_1 = e^{kx}$

Esto es, si reemplazamos en $(***)$ vale.

$$y_1 = e^{kx} \qquad y_1' = k e^{kx} \qquad y_1'' = \boxed{k^2 e^{kx}}$$

Así,

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

$$a_0 \cdot k^2 e^{kx} + a_1 k e^{kx} + a_2 e^{kx} = 0$$

$$e^{kx}\left(a_0k^2+a_1k+a_0\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad a_0k^2+a_1k+a_2=0$$

Ecuación característica

$$\boxed{a_0k^2+a_1k+a_2=0}$$

Ec. característica

$$K=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4(a_2)(a_0)}}{2a_0}$$

Para EDOs con coef constante, tengo soluciones $y_1=e^{kx}$, tengo una ec. característica que resuelve el valor de K. Sin embargo, uno puede dar más, dar la solución general y esto dependerá de como sea el discriminante $\boxed{D = a_1^2 - 4a_0a_2}$

Caso 1) $D > 0$ (K tiene 2 soluciones reales K_1, K_2)

Entonces la sol. general es

$$y(x) = C_1 e^{K_1 x} + C_2 e^{K_2 x}$$ ✓

Caso 2) $D = 0$ (K tiene 1 sol real K.)

la sol. general es

Entonces la sol. general

$$y(x) = C_1 e^{kx} + C_2 \cdot x \cdot e^{kx}.$$

Caso 3: $D < 0$ (k tiene 2 sol. complejas)

digamos $\boxed{\begin{array}{l} k_1 = \alpha + i\beta \\ k_2 = \alpha - i\beta \end{array}}$

Entonces la sol. general es.

$$y(x) = e^{\alpha x}\left[c_1 \cos(\beta x) + c_2 \operatorname{sen}(\beta x)\right]$$

Ej: 1 Solucione $\boxed{y'' - 3y' + 2y = 0}$

Ec. caracteristica:

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0$$

$a_0 = 1 \qquad a_1 = -3 \qquad a_2 = 2$

Ec. Característica $\Big\}$ $k^2 - 3k + 2 = 0$

$$(k-2)(k-1) = 0$$

$$\boxed{k_1 = 2} \qquad \boxed{k_2 = 1}$$

La sol. de la ec. característica son 2 soluciones reales (caso 1)

Así, la solución general

$$\underline{y(x) = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}}$$

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}}$$

Ej 2 Solucion: $y'' + 4y' + 5y = 0$

Ec. caracteristica: $k^2 + 4k + 5 = 0$

$$k = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(5)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$\boxed{k_1 = -2 + i}$ $\boxed{k_2 = -2 - i}$

(Caso 3) $Re(k) = \alpha = -2$

$$\operatorname{Im}(k) = \beta = 1$$

Así, sol. general

$$y(x) = e^{-2x}\left[C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x\right]$$

Ej 3 Solucionar $y'' + 2y' + y = 0$

EDO c/ coef/ ctes y su Ec. característica es

$$K^2 + 2K + 1 = 0$$

$$(k+1) = 0$$

$$\boxed{k = -1} \qquad (\text{caso } 2)$$

Así, sol. general

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}}$$

2.1.2) Ec. homogéneas de Tipo Euler.

Considere la ec. tipo Euler:

$$a_0 x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0.$$

donde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

La ecuación tipo euler tiene la siguiente ecuación característica

$$a_0 k^2 + (a_1 - a_0) k + a_2 = 0$$

y su solución general depende del discriminante de esta ecuación. (o que los soluciones sean reales, complejos o raíz sólo real)

Caso 1) $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $k_1 \neq k_2$ (sol. reales $\neq$)

$$y(x) = C_1 x^{k_1} + C_2 x^{k_2}$$

Caso 2) $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $k_1 = k_2 = k$.

(una sol. real)

$$y(x) = C_1 x^{k} + C_2 \cdot \ln x \cdot x^{k}$$

Caso 3) $K_1, K_2 \in \mathbb{C}$, $K_1 = \overline{K_2}$, $K_1 = \alpha + i\beta$
(son complejos) $K_2 = \alpha - i\beta$

$$\boxed{y(x) = x^{\alpha}\left[C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \operatorname{sen}(\beta \ln x)\right]}$$

$e^{\alpha (x)^{\ln x}}$ $e^{\ln x^{\alpha}} =$

Obs: Aquí uno puede reducir la EDO tipo Euler a una EDO c/ coef constantes con el cambio de variable $x = e^{t}$ $(t = \underline{\ln x})$

Ej: ① $a_0 x^2 y'' + \underbrace{\frac{5}{2}}_{a} x y' \underbrace{-}_{a_2 = -1} y = 0$

$a_0 = 2$

2 $x^2y'' - xy' + y = 0$

3 $x^2y'' + xy' + y = 0$

$a_0x^2y'' + a_1xy' + a_2y = 0$

$a_0 = 1$

$a_1 = \frac{5}{2}$

$a_2 = -1$

1 es de tipo Euler ✓

$a_0k^2 + (a_1 - a_0)k + a_2 = 0$

$k^2 + \left(\frac{5}{2} - 1\right)k - 1 = 0$

$k^2 + \frac{3}{2}k - 1 = 0$

$2k^2 + 3k - 2 = 0$

$(2k - 1)(k + 2) = 0$

$(2k-1)(k+2)$

$k = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $k = -2$

Son sol. reales diferentes, así

$$\boxed{y(x) = C_1 x^{1/2} + C_2 x^{-2}}$$

(3) $\qquad x^2 y'' + x y' + y = 0$

$a_0 = 1 \qquad a_1 = 1 \qquad a_2 = 1$

EC. carácter. $\qquad a_0 k^2 + (a_1 - a_0)k + a_2 = 0$

$$K^2 + 1 = 0$$

$$\boxed{K = \pm i}$$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = 1$$

$$y(x) = x^{\alpha}\left(c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\beta \ln x)\right)$$

$$\boxed{y(x) = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\ln x)}$$