Edos de 2do orden (2)

miércoles, 28 de octubre de 2020 08:19

0) $\underbrace{\text{Teo existencia y unidad}}$

Sea $f: \Omega \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x, y, y') \longrightarrow f(x, y, y') = y''$

Suponga que $\forall (x, y, y') \in \Omega \times \mathbb{R}^2$ $\exists \dfrac{\partial f}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y'}$

y son continuas y que $(x_0, y_0, y_0') \in \Omega \times \mathbb{R}^2$.

Entonces existe una única solución para la EDO

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y'), \quad \text{entorno a } x \in \Omega$$

tal que $\underbrace{y(x_0) = y_0}$ e $\underbrace{y'(x_0) = y_0'}$.

1) Caso donde es fácil resolver la EDO de 2° orden, reduciéndola a una EDO de 1° orden.

2) Solución para EDOs lineales de 2° orden

2.1) EDOS lineales homogeneas

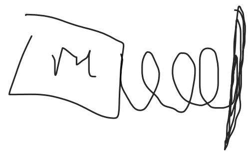
2.2) EDOs lineales no homogeneas

2) Una EDO lineal de 2° orden tiene la forma

$$(*) \qquad a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = \phi(x)$$

donde $a_0, a_1, a_2, \phi : \Omega \to \mathbb{R}$ son continuas

Ej: La EDO que representa "el movimiento ondulatorio de una masa acoplada a un resorte



este movimiento es representado por $X(t)$.

Su EDO es

$$m\frac{d^2x}{dt} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t),$$

donde m = masa, c y k constantes y F función dada.

Vamos a analizar la EDO $(*)$ en su forma normal, si $a_0(x) \neq 0$, tenemos que $(*)$ en su forma normal es:

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)y = g(x).$$

Así $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y')$, donde

$$\boxed{f(x, y, y') = g(x) - P_1(x)\, y' - P_2(x)\, \underline{y}}$$

Si $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -P_2(x)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y'} = -P_1(x)$.

existen y son continuas, por Teo de Existencia y unicidad, si $(x_0, y_0, y'_0) \in \Omega \times \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ existe una única solución y tal que

$$y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y'_0.$$

Esto nos dice que podemos aplicar el T.E.U a EDOs de la forma (2).

— o —

- Operador diferencial lineal

Para deducir con mayor facilidad algunas propiedades importantes de este tipo de ecuaciones asociadas a P_1 y a P_2, consideramos el op. diferencial

$$L : C^1(\Omega) \longrightarrow C^0(\Omega)$$

$$y(x) \longrightarrow L[y](x) = \left(\frac{d^2}{dx^2} + P_1(x)\frac{d}{dx} + P_2(x)\right) y(x)$$

$$dx^2 \qquad dx$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{L}$$

donde $C^1(\Omega) = \{ y : \Omega \to \mathbb{R} \, / \, y'$ existe es continua $\}$

$$C^0(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \, / \, f \text{ continua} \}$$

y $P_1, P_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ son continuas

Así

$$L[y](x) = \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + P_1 \frac{d y(x)}{dx} + P_2 y$$

Reemplazando en (1), tenemos

$$L[y] = g(x) .$$

Prop (1) L se llama op. dif. lineal pues

- — Vete

$$L[cy+z] = c\,L[y] + L[z]$$ ✓

2.1) EDOS lineales de 2° orden homogenas ($g(x) = 0$)

Una EDO de este tipo tiene la forma

$$L[y] = 0 \qquad (2)$$

El siguiente teorema es consecuencia de la propiedad (1)

Teo 1 (i) si $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_m$ son

las soluciones de (2), entonces

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_m y_m = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i$$

donde $c_i \in \mathbb{R}$ $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ es tambien solucion de (2).

(2i) Si en (2) P_1 y P_2 son constantes y (2) tiene una solucion compleja $y = \alpha + i\beta$, entonces la parte real y la parte imaginaria son soluciones de (2)

Dem: Tarea: Entregar pdf el Miercoles 11/11, nota sumativa 3° revolucion.

$u_1, u_2, \ldots, u_m : \Omega \to \mathbb{R}$

Son linealmente dependientes si existen constantes no nulos c_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que

$$c_1 u_1(x) + \ldots + c_n u_n(x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega$$

② $u_1, u_2, \ldots u_m$ son linealmente independientes

si $$c_1 u_1(x) + \ldots + c_n u_n(x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = \ldots = c_n = 0 .$$

Ej ① $1, x, x^2, \ldots, x^n$ son l.i

si $$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n = 0$$

$\Rightarrow$ Los valores de x que valen la ecuación anterior son n, pues hay n raíces para la ecuación. Entonces tengo que encontrar $C_0, C_1, \dots C_n$ que valga para las n raíces.

$$\Rightarrow \quad C_0 = C_1 = \dots = C_n = 0 \quad \#$$

(2) Si $K_1 \neq K_2$, $e^{K_1 x}$, $e^{K_2 x}$ son l.i

Sup)
$$C_1 e^{K_1 x} + C_2 e^{K_2 x} = 0$$

$$e^{K_1 x}\left(C_1 + C_2 e^{(K_2 - K_1) x} \right) = 0$$

$$(K_2 - K_1) X$$

$(**)$ $\quad C_1 + C_2 e^{(k_2-k_1)x} = 0 \quad / \frac{d}{dx}$

$$0 + (k_2-k_1) C_2 e^{(k_2-k_1)x} = 0$$

$$(k_2-k_1) C_2 = 0$$

$k_2 - k_2 = 0 \quad \vee \quad C_2 = 0$

por Hip $k_1 \neq k_2$ $\Rightarrow$ $\boxed{C_2 = 0}$

de $(**)$ $\Rightarrow$ $\boxed{C_1 = 0}$

$\therefore$ ST son l.i.

③ Demostrar que los dgts son l.i Dem

a) $e^{kx}, \; xe^{kx}$ b) $\operatorname{sen}(kx), \; \cos(kx)$

Tarea Entrega el 11/11 en pdf.
Nota sumativa 3° evaluación

Teo 2 Si $y_1, y_2 \in C^1(\Omega)$ son l.d, entonces

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 = 0$$

(**Def** $W(x)$ se llama Wronsquiano)

Dem: Sea c_1, c_2 no nulos constantes

tq $c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0 \;/\; y'$

(1) $c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$ $/ y_1'$

(2) $c_1 y_1' + c_2 y_2' = 0$ $/ y_1$

$(1) \cdot y_1' - (2) \cdot y_1 \Rightarrow$ $c_2 (y_1' y_2 - y_1 y_2') = 0$

$\Rightarrow c_2 = 0 \vee y_1' y_2 - y_1 y_2' = 0$

por hip $c_2 \neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 0}$$

Obs: Recordemos que del álgebra lineal, para A_1, A_2, B_1, B_2 constante

$$\boxed{\begin{aligned} A_1 x + A_2 y &= 0 \\ B_1 x + B_2 y &= 0 \end{aligned}} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

Teo: Sea $y_1, y_2 \in C^1(\Omega)$ l.i soluciones de la EDO Homogenea

$$y'' + P_1(x)\, y' + P_2(x)\, y = 0$$

con coeficiente $P_1, P_2 \in C^0(\Omega)$, entonces

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \quad \underline{\forall x \in \Omega}$$

Dem: Suponga que $\exists\, x_0 \in \Omega$

tq $W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0.$

$$\boxed{y_1 y_2' - y_1' y_2 \Big|_{x=x_0} = 0}$$

Por hip. y_1 e y_2 son l.i.

Así $c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0$

$\Rightarrow c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0$ $\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

$$c_2 \big(\underbrace{y_1'(x_0)\, y_2(x_0) + y_1(x_0)\, y_2'(x_0)}_{} \big) = 0$$

$c_2 = 0$ o $w(x_0) = 0$ ✓

pendiente

y_1, y_2 l.i $\Rightarrow$ $W(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Sup $\exists x_0$ tq $W(x_0) = 0$ $\Rightarrow$ $c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0$

$c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0$

Además. $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ otra solución

Pero $\boxed{y = 0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{c_1 = c_2 = 0}$

$\Rightarrow$ y_1, y_2 son l.i para x.

pendiente.