Edos de segundo orden

miércoles, 21 de octubre de 2020 08:23

$\boxed{\text{Teo de existencia y unicidad para EDOs de 2° orden}}$

Una EDO de 2° orden tiene la forma

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad (1)$$

Esta ecuación, puede ser despejada y quedar

$$\boxed{y'' = \frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y')$$

Ej

$$y'' = x^2 + \operatorname{Sen} x \qquad f(x, \cancel{y}, \cancel{y'})$$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = x^2 + \operatorname{sen} x \quad / \int$$

$$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \int \left(x^2 + \operatorname{sen} x\right) dx$$

$$\frac{dy}{dx} + \tilde{C}_1 = \frac{x^3}{3} - \cos x + \tilde{C}_2 \quad / \int dx$$

$$\int \frac{d(y)}{dx} \cdot dx + \int \tilde{C}_1 \, dx = \int \frac{x^3}{3} dx - \int \cos x \, dx + \int \tilde{C}_2 \, dx$$

$$y + \underline{\tilde{C}_1 x} + \underline{\tilde{C}_3} = \frac{x^4}{12} - \operatorname{sen} x + \underline{\tilde{C}_2 x} + \underline{\tilde{C}_4}$$

$$\boxed{y = \frac{x^4}{12} - \operatorname{sen} x + C_1 x + C_2}$$

dode $C_1 = \tilde{C}_2 - \tilde{C}_1$ y $C_2 = \tilde{C}_4 - \tilde{C}_3$

P. Cond. inicial.

$$\left.\begin{aligned} y'' &= x^2 + \operatorname{sen} x \\ y(0) &= 1 \end{aligned}\right| (2)$$

$$y(0) = \frac{0^4}{12} - \operatorname{sen} 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 1$$

$$\boxed{C_2 = 1}$$

$$\boxed{y = \frac{x^4}{12} - \operatorname{sen} x + C_1 x + 1}, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

12

$\Rightarrow$ que el P.V.I (2) no tiene única solución.

Para fijar la constante C_1, necesitamos una 2° c. inicial:

↳ Puede ser el valor de la solución en otro punto, eg. $y(x_0) = y_0$, este se llama Problema de frontera.

↳ Puede ser el valor de la 1° derivada en el mismo punto, eg $y'(0) = y'_0$, este se llama problema de valores iniciales. (P.V.Is)

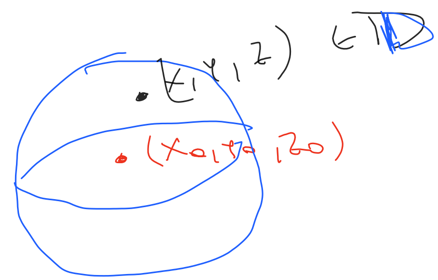
Como en los problemas de frontera muchas veces no tienen solución o si tienen no son únicas, el que me garantiza la existencia y unicidad son los P.V.I.s de la forma

$$y'' = f(x, y, y')$$
$$y(x_0) = y_0$$
$$y'(x_0) = y'_0$$

P.I.Vs

Def: D es abierto si $\forall (x_0, y_0, z_0) \in D$ $\exists\, a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que $\forall\, x \in (x_0 - a, x_0 + b)$, $y \in (y_0 - b, y_0 + b)$, $z \in (z_0 - c, z_0 + b)$

$\rightarrow (x, y, z) \in D$

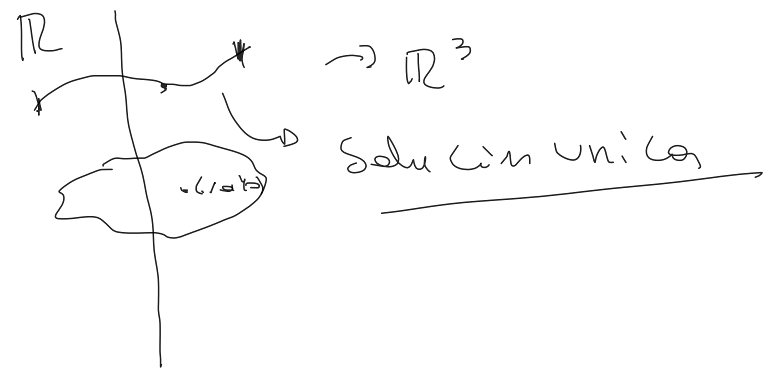


Teo) (Ex. y un.) Sea D un abierto de (x,y,z) y $f: D \to \mathbb{R}$. Suponga que f tiene derivada parcial con respecto a y y a z $\forall (x,y,z) \in D$ y que $\frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial f}{\partial z}$ son continuas en D. Sea $(x_0,y_0,z_0) \in D$. Entonces la EDO

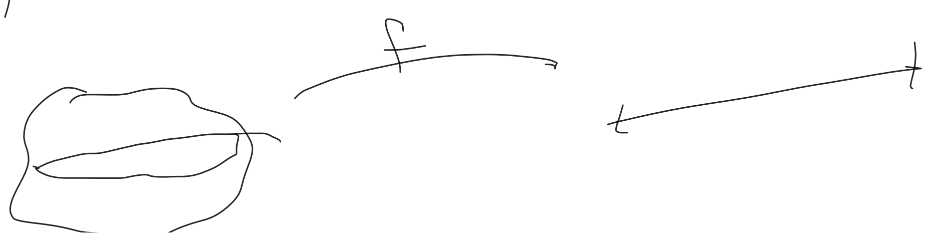
$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x,y,y')$$

tiene solución u definida en un intervalo alrededor de x_0 y verifica $u(x_0) = y_0$ y $u'(x_0) = z_0$. Más aún, si v es solución tq $v(x_0) = y_0$ $v'(x_0) = z_0$, entonces $u = v$.

$\boxed{y' = f(x,y)}$



$y'' = f(x,y,y')$



$\Rightarrow \exists$ única curva solución.

obs: Muchas veces para solucionar este tipo de Ecuaciones (de 2° orden) diferenciales se introduce un cambio de variable y eso hace a que el problema se reduzca a una EDO de 1° orden, pero de mayor dimensión.

$$(*) \quad y'' = f(x, y, y')$$
$$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y'_0$$
$$u(x_0) = y'_0$$

$$u = \frac{dy}{dx} = y' \qquad u' = y''$$

$$(y', u') = (u, f(x, y, u)) \quad \text{Sistema de EDO}$$

$\{y', y''\} = \}$

$(y(x_0), y'(x_0)) = (y_0, y'_0)$

de 1° orden

Tipos de ejemplos donde es fácil resolver las EDOs de 2° orden

(1) $\dfrac{d^2y}{dy^2} = f(x)$

(Aplico $\int dx$ 2 veces)

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \dfrac{dy}{dx}\right)$

Aquí se introduce un cambio de variable $P = \dfrac{dy}{dx} (= y')$

$$\boxed{p' = f(x, p)}$$ ✓ EDO lineal.

Ej:

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - \frac{2}{x}\frac{dy}{dx}$$

$$p = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dx} = 1 - \frac{2}{x}p}$$ ✓

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y = \int p\,dx + c}$$

EDO lineal.

Se resuelve x Leibniz.

(3) $$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$$

Se considera un cambio de variable

$$P = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{dp}{dx} = f(y, p)}$$

Ej:

$$2\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$P = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{1}{2} P^2$$

$$\Rightarrow \int \frac{dp}{p^2} = \frac{1}{2}\int dx$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \int p\, dx}$$

(4) $F(x, y, y', y'') = 0$

donde F es la diferencial total de $\psi(x, y, y')$

esto es, $$\frac{d\psi}{dx} = F(x, y, y', y'')$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\psi}{dx} = 0} \Rightarrow \boxed{\psi(x, y, y') = C}$$

~~Ej~~ $y y'' + (y')^2 = 0$

$$\psi^{(x,y,y')} = \boxed{y' \cdot y}$$

$$\frac{d\psi}{dx} = y'' \cdot y + y' \cdot y'$$ ✓

$$\Rightarrow \quad \frac{d\psi}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \psi = c$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y'y = C}$$ EDO de 1° orden que se resuelve.

(5) $F(x, y, y', y'') = 0$

tal que $\exists$ un fcn integrante $u = u(x, y, y')$

de modo que $\mu F(x,y,y',y'')$ es diferencia total de $\phi(x,y,y')$, es decir

$$\frac{d}{dx}(\mu \cdot F) = \phi.$$

$\Rightarrow$ Nuevo el tipo. (4)

Ej: $\quad yy'' - (y')^2 = 0$

$\mu = \frac{1}{y^2}$ Factor integrante. $\Rightarrow \mu \cdot F = 0$ es:

$$\frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = 0$$

$$\boxed{\psi = \frac{y'}{y}} \qquad \boxed{\frac{d\psi}{dx} = \frac{y''y - y'y'}{y^2}}$$

$$\boxed{\frac{y'}{y} = C.}$$ Reduzco a una EDO de 1° orden.

(6) $F(x, y, y', y'') = 0$

Si F homogenea respecto a la 2°, 3° y 4° variable $\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que

$\forall (x, y, y', y'')$ $\quad F(\cancel{x}, ky, ky', ky'') = k^n F(x, y, y', y'')$

En este caso si F e homogene introducimos una variable z a través de

$$\boxed{y = e^{\int z\,dx}}$$

$$y' = z\,e^{\int z\,dx} \qquad y'' = (z^2 + z')\,e^{\int z\,dx}$$

Como $F(x, y, y', y'') = 0$

Reemplazando $F\left(x, e^{\int z\,dx}, z\,e^{\int z\,dx}, (z^2+z')\,e^{\int z\,dx}\right) = 0$

$$\boxed{\left(e^{\int z\,dz}\right)^n F(x, 1, z, (z^2+z')) = 0}$$

→ EDO de 1° orden.

Ej $\quad y\,y'' - (y')^2 = 6x\,y^2$

(~~a~~) $yy'' - (y')^2 - 6xy^2 = 0$

$F(x, y, y', y'') = y y'' - (y')^2 - 6xy^2$

$F(x, ky, ky', ky'') = (ky)(ky'') - (ky')^2 - 6x(ky)^2$

$= k^2 yy'' - k^2 (y')^2 - k^2 6xy^2$

$= k^2 F(x, y, y', y'')$

$\Rightarrow \exists\, n = 2$ tq la EDO $F = 0$ es homogenea

Como es homogenea, sea $\boxed{y = e^{\int z\, dx}}$

$y' = z e^{\int z dx}$ $\quad y'' = (z^2 + z') e^{\int z dx}$.

Reemplazando en (*)

$$\underbrace{e^{\int z\,dz}}_{y}\underbrace{(z^2+z')}_{y''}e^{\int z\,dz} - \underbrace{\left(z e^{\int z\,dx}\right)^2}_{(y')^2} - 6x\underbrace{\left(e^{\int z\,dx}\right)^2}_{6x(y)^2} = 0$$

$$\left[e^{\int z\,dx}\right]^2\left(\underbrace{\cancel{z^2}+z'-\cancel{z^2}-6x}\right)=0$$

$$z'-6x=0$$

$$dz = 6x\,dx \quad /\int$$

$$z = 3x + c$$

$$\Rightarrow \quad y = e^{\int z\,dx} = e^{\int (3x^2 + c)\,dx}$$

$$y = e^{x^3 + cx + c_1} = e^{x^3} \cdot e^{cx} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{\tilde{c}}$$

$$\boxed{y = \tilde{c}\, e^{x^3 + cx}}, \quad \tilde{c} = e^{c_1}$$