Ejercicios Resueltos EDO variables separables

Ayudantía Tópicos de Ecuaciones Diferenciales

October 2, 2020

1. Ejemplo Variable Separable 1

$$yy' + (1 + 2^2)sin(x) = 0$$

Nos dan además el siguiente valor para y cuando $x = 0$:

$$y(0) = 1$$

Podemos reordenar la ecuación como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(1+y^2)}{y} sin(x)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{1+y^2} dy = -sin(x)dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{y}{1+y^2} dy = \int -sin(x)dx$$

Podemos resolver la integral de la izquierda utilizando el siguiente cambio de variable:

$$u = 1 + y^2$$

$$\Rightarrow du = 2ydy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} du = ydy$$

Reemplazando este cambio de variable en la expresión:

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = -\int sen(x)dx$$

$$\frac{1}{2} ln(|u|) = cos(x) + C$$

Volviendo a la variable original:

$$\frac{1}{2} ln(|1 + y^2|) = cos(x) + C$$

Como $1 + y^2$ es siempre positivo en $\mathbb{R}$, $|1 + y^2| = 1 + y^2$:

$$\frac{1}{2} ln(1 + y^2) = cos(x) + C \tag{1}$$

Podemos despejar la constante C utilizando el caso base dado por el enunciado:

$$x = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$\frac{1}{2}ln(2) = cos(0) + C = 1 + C$$

$$C = \frac{1}{2}ln(2) - 1 = \frac{ln(2) - 2}{2}$$

Reemplazamos el valor obtenido para la constante C en la ec. (1):

$$\frac{1}{2}ln(1 + y^2) = cos(x) + \frac{ln(2) - 2}{2}$$

$$ln(1 + y^2) = 2cos(x) + ln(2) - 2$$

Aplicamos exponencial:

$$1 + y^2 = e^{2cos(x)+ln(2)-2}$$

$$y^2 = 2e^{2cos(x)-2} - 1$$

$$y = \pm\sqrt{2e^{2cos(x)-2} - 1}$$

Como $y(x = 0) = +1$, solo consideramos la parte positiva de la raiz:

$$y(x) = \sqrt{2e^{2cos(x)-2} - 1}$$

Obteniendo así, la expresión explicita de y(x).

2. Ejemplo Variable Separable 2

   Sea $y(x) : R^+ \to R^+$.

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\frac{1}{y}dy = -2xdx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = -\int 2xdx$$

$$ln(|y|) = -x^2 + C$$

   Como y es siempre positivo, $|y| = y$:

$$ln(y) = -x^2 + C$$

   Aplicamos exponencial:

$$y = e^{-x^2+C}$$

$$y(x) = \frac{e^C}{e^{x^2}}$$

   Obteniendo así, la expresión explicita de y(x).

3. Ejemplo Variable Separable 3

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{x^2}$$
$$\frac{1}{y^3}dy = \frac{1}{x^2}dx$$
$$\int \frac{1}{y^3}dy = \int \frac{1}{x^2}dx$$
$$\frac{-1}{2y^2} = \frac{-1}{x} + C = \frac{-(1-xC)}{x}$$
$$\frac{1}{2y^2} = \frac{(1-xC)}{x}$$
$$\frac{x}{(1-xC)} = 2y^2$$
$$\frac{x}{2-2xC} = y^2$$
$$\pm\sqrt{\frac{x}{2-2xC}} = y(x)$$

Reordenando la expresión:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{x}{2-2xC}}$$

Obteniendo así, la expresión explicita de y(x).

4. Ejemplo Variable Separable 4

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1+2y^2}{ysin(x)}$$
$$sin(x)dx = \frac{1+2y}{y}dy$$
$$sin(x)dx = (\frac{1}{y} + 2y)dy$$
$$\int sin(x)dx = \int (\frac{1}{y} + 2y)dy$$
$$-cos(x) + C = \int \frac{1}{y}dy + \int 2ydy$$
$$-cos(x) + C = ln(|y|) + y^2$$

Reordenando la expresión:

$$ln(|y(x)|) + y(x)^2 = C - cos(x)$$

Obteniendo así, la expresión explicita de y(x).