Aplicación edos lineales de 1er orden

martes, 29 de septiembre de 2020 20:17

Previo . T.I.S.U

1) $xy' = 4y \quad ; \quad y(1) = -3.$

$$x\frac{dy}{dx} = 4y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{4\,dx}{x} \quad / \int \qquad \boxed{|x^4| = |x|^4}$$

$$\int \frac{dy}{y} = 4\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = 4 \cdot \ln|x| + c \quad / \, e^{(*)}$$

$$|y| = e^{\ln|x|^4} \cdot e^c \qquad \boxed{a\ln(b) = \ln(b)^a}$$

$$|y(x)| = x^4 \cdot e^c$$

c.i $\quad y(1) = -3$

$$|y(1)| = 1^4 \cdot e^c$$

$$|-3| = e^c$$

$$\boxed{e^c = 3}$$

$$|y(x)| = x^4 \cdot 3$$

$$\boxed{|y(x)| = 3x^4}$$ Solución de EDO (1)

Bibliografia: Zill, páginas 72-80

Aplicación de EDOS lineales de 1° orden

(*) $\boxed{y' = a(x)y + b(x)}$ EDO lineal

Vamos a ver 6 aplicaciones de este tipo (*)

1°) Crecimiento de Población (decrecimiento)
- Bacterias.
- Animales pequeño.

La EDO para el crecimiento de población es:

$$N'(t) = KN \qquad K = cte.$$

C.i. $\quad N(0) = N_0$

Condición Anexa $t_s > 0$ $\quad N(t_s) = N_s$

2°] Periodo medio de un Atomo

↳ Calcula el periodo medio en que un átomo muta y se transforma en otro átomo

La EDO para calcular el periodo medio de un átomo es:

$$\boxed{\begin{array}{ll} & A'(t) = KA \\ C.i & A(0) = A_0 \\ C.A & A(t_s) = A_s \end{array}} \quad , \quad K = cte.$$

$t_s > 0$

3°] Carbono Radioactivo (C-14)

Calcula la edad de un fosil, donde se sabe que el periodo medio del C-14 es aprox 5600 años.

$$A(5600) = A_0$$

$$A(5600) = \frac{A_0}{2}$$

La EDO q' calcula el C-14 es:

$$A'(t) = KA$$

c.i $\quad A(0) = A_0$

c.A $\quad A(5600) = \dfrac{A_0}{2}$

$T° = $ temperatura

4°) → Ley de enfriamiento de Newton se aplica para calcular el enfriamiento de un objeto

La EDO asociada es:

$$T'(t) = K(T - T_m) \quad ; T_m = T° \text{ ambiente}$$

c.i $\quad T(0) = T_0$

c.A $\quad T(t_s) = T_s$

$t_s > 0$

5°) Mezcla

6°) Circuito

Ejemplos

1) Crecimiento bacteriano

Un cultivo tiene una cantidad inicial N_0 de bacterias. Cuando $t = 1$ hora, la cantidad medida de bacterias es $\frac{3}{2}N_0$. Si la rapidez de reproducción es proporcional a la cantidad de bacterias presentes, calcule el tiempo necesario para triplicar la cantidad inicial de bacterias.

Datos

Crecimiento tiene EDO: $\boxed{\frac{dN}{dt} = KN}$

Condición inicial: $N(0) = N_0$

Condición Anexa: $N(1) = \frac{3}{2}N_0$

¿Solución?

$\Rightarrow$ $\frac{dN}{dt} = KN$

$$dt$$

$$\frac{dN}{N} = k\,dt \quad / \int$$

$$\ln|N| = kt + c$$

$$|N(t)| = e^{kt}\cdot e^{c}$$

C.I. $\quad N(0) = N_0$

$$\Rightarrow |N(0)| = e^{k\cdot 0}\cdot e^{c}$$

$$|N_0| = e^{c}$$

Como es creciente y depende de tiempo > 0 nos podemos deshacer de la norma

$$\Rightarrow \boxed{N_0 = e^{c}}$$

Así la solución es

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

C. Anexa $N(1) = \frac{3}{2} N_0$

$\Rightarrow N(1) = N_0 e^{k \cdot 1}$

$\Rightarrow \frac{3}{2} \cancel{N_0} = \cancel{N_0} e^{k} \quad / \ln(*)$

$\ln\left(\frac{3}{2}\right) = k$

$\boxed{k = 0{,}4055}$

Así, la solución de la EDO es

$$\boxed{N(t) = N_0 e^{0{,}4055 t}}$$

"Calcule el tiempo necesario para triplicar la c. i de Bacterias (N_0)"

$\cancel{N_0} e^{0{,}4055 t} = 3 \cancel{N_0} \quad / \ln(*)$

$$0,4055\,t = \ln(3)$$

$$t = \frac{\ln 3}{0,4055} = \boxed{2,71\ [\text{horas}]}$$

② Periodo medio del Plutonio

Un reactor de cria convierte al Uranio 238, relativamente stable, en Plutonio 239, un isótopo radioactivo. Al cabo de 15 años, se ha desintegrado el 0,043 % de la cantidad inicial, A_0, de una muestra de Plutonio. Calcule el periodo medio del Plutonio 239, si la razon de desintegración es proporcional a la cantidad presente.

Datos

tpo
Periodo medio

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

C.i) $A(0) = A_0$

C. Anexo) $A(15) = A_0 - 0{,}043\% \, A_0$

$$A(15) = A_0 - \frac{0{,}043}{100} A_0$$

C.A) $A(15) = 0{,}99957 \, A_0 \Leftarrow$

resolucimo

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

$$\frac{dA}{A} = k\,dt \quad / \int$$

$$\ln|A| = kt + C$$

$$|A| = e^{kt} \cdot e^{C}$$

obs Aquí tambien nos podemos desaser de ||

$$A(t) = e^{kt} e^{C}$$

Hallamos C uso C.i) $A(0) = A_0$

$$A(0) = A_0 = e^{k\cdot 0} e^{c}$$

$$e^{c} = A_0$$

$$\Rightarrow \quad A(t) = A_0 e^{kt}$$

Hallar 'k' uso C.I $\quad A(15 \text{ años}) = 0{,}99957 A_0$

$$A(15) = 0{,}99957 \cancel{A_0} = \cancel{A_0} e^{k\cdot 15}$$

$$\ln(0{,}99957) = 15k$$

$$k = \frac{\ln(0{,}99957)}{15} = -0{,}00002867$$

$$\Rightarrow \boxed{A(t) = A_0 e^{-0{,}00002867\,t}}$$

solución de la EDO

'Calcule el periodo medio del Plutonio'

$$\boxed{A(t) = \frac{A_0}{2}}$$

Así

$$A_0 e^{-0{,}00002867\,t} = \frac{A_0}{2}$$

$$-0{,}00002867\,t = \ln(1/2)$$

$$t = \frac{\ln(1/2)}{-0{,}00002867}$$

$$\boxed{t = 24{,}180\ [\text{año}]}$$

③ Antigüedad de un fósil:

Se analizó un hueso fosilado y se encontró que contenía la centésima parte de la cantidad original del C-14. Determinar la edad del fósil.

Datos:

EDO

C-14

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

C.I $\quad A(0) = A_0$

C.A $\quad A(5600 \text{ años}) = \frac{A_0}{2}$

1° Solución

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

$$\frac{dA}{A} = k\,dt$$

$$\ln|A| = kt + c$$

$$A(t) = e^{kt} \cdot e^{c}$$

C.I $\quad A(0) = A_0 = e^{0} \cdot e^{c}$

En $\quad A(t) = A_0 e^{kt}$

C.A) $A(5600) = A_0/2$

$\Rightarrow A(5600) = \frac{\cancel{A_0}}{2} = \cancel{A_0}\, e^{k\,5600}$

$\ln(1/2) = k \cdot 5600$

$k = \frac{\ln(1/2)}{5600} = -0{,}00012378$

$\Rightarrow$ Solución es

$$\boxed{A(t) = A_0\, e^{-0{,}00012378 \cdot t}}$$

Dato

$$\boxed{A(t) = \frac{A_0}{100}}$$

$\cancel{A_0}\, e^{-0{,}00012378\, t} = \frac{\cancel{A_0}}{100} \quad / \ln(x)$

$-0{,}00012378\, t = \ln(1/100)$

$$t = \frac{\ln(1/100)}{-0{,}00012378}$$

$$\boxed{t = 37.140 \ [\text{años}]}$$

(4) Ley de enfriamiento de Newton
(Enfriamiento de un pastel)

Al ~~sacar~~ un pastel del horno, ~~su T° es 300 °F~~. Después de 3 minutos, es de 200 °F.

¿En cuanto tiempo se enfriará hasta llegar a su T° ambiente 70 °F?

Dato

(1) EDO de enfriamiento

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_m)$$

$$T(0) = T_0$$

$$T(t_s) = T_s$$

② $T(0) = 300°F$

③ $T(3 \text{ minutos}) = 200°F$

④ $T_m = 70°F$

ASI

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= k(T-70) \\ T(0) &= 300 \\ T(3) &= 200 \end{aligned}}$$

1° Resuelvo EDO

$$\frac{dT}{dt} = k(T-70)$$

$$\frac{dT}{T-70} = k\,dt$$

$$\ln|T-70| = kt + c$$

$$|T(t)-70| = e^{kt} \cdot e^{c}$$

C.i $T(0) = 300$

$$|T(0)-70| = |300-70| = e^{k\cdot 0}\cdot e^{C}$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{C} = 230}$$

$$|T(t)-70| = 230e^{kt}$$

$\underline{\text{C.A}}$ $T(3) = 200$

$$|T(3)-70| = 230\, e^{k\cdot 3}$$

$$|200-70| = 230\, e^{3k}$$

$$\frac{130}{230} = e^{3k}$$

$$\ln\left|\frac{130}{230}\right| = 3k$$

$$\boxed{k = \frac{\ln\left|\frac{130}{230}\right|}{3} = -0,19018}$$

Así

$$|T(t)-70| = 230\, e^{-0{,}19018\,t}$$

sin pérdida de generalidad

$$\boxed{T(t) = 230\, e^{-0{,}19018\,t} + 70}$$

observe que llega a ser 70°F si $t \to \infty$.

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty} \left(230\, e^{-0{,}19018\,t} + 70\right) = 70$$

Obs: Aquí el tiempo debe ser ∞ para llegar a T° ambiente. Sin embargo, para el pedazo un tiempo finito, podemos pensar q' la T° ambiente a la que queremos llegar es 70,5, esto es un aproximado a 70

$$T(t) = 70{,}5$$

$$230\, e^{-0{,}19018t} + 70 = 70{,}5$$

$$230\, e^{-0{,}19018t} = 0{,}5$$

$$e^{-0{,}19018t} = \frac{0{,}5}{230}$$

$$\boxed{t = \frac{\ln(1/460)}{-0{,}19018} = 32{,}3\,[min]}$$