Guía Resumen Ayudantía 1

Ayudantía Tópicos de Ecuaciones Diferenciales

September 29, 2020

1. Ejemplo pendiente Ecuación de Bernoulli.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x} + x\sqrt{y} \tag{1}$$

Recordemos que las EDO de la forma de Bernoulli son tales que:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n$$

Y se utiliza el cambio de variable $z = y^{1-n}$. En nuestro caso tenemos que el cambio de variable es con $n = \frac{1}{2}$:

$$z = y^{1-n} = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$$
$$z = \sqrt{y}$$

Derivando la variable z respecto a x, obtenemos que:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(y^{\frac{1}{2}})}{dx} = \frac{1}{2}y^{(-\frac{1}{2})}\frac{dy}{dx}$$

Es decir:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}$$

Reemplazamos $\frac{dy}{dx}$ de la ecuación (1):

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{4y}{x} + x\sqrt{y}\right)$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{4y}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}x\sqrt{y}$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{y}{\sqrt{y}}\frac{2}{x} + \frac{x}{2}$$
$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{y}\frac{2}{x} + \frac{x}{2}$$

Recordemos que $z = \sqrt{y}$, entonces la expresión anterior nos queda como:

$$\frac{dz}{dx} = z\frac{2}{x} + \frac{x}{2} \tag{2}$$

Lo que es una EDO lineal. Recordemos que una EDO lineal tiene la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)$$

Y se puede solucionar utilizando el método de Liebniz:

$$y(x) = e^{\int a(x)dx}\left(\int e^{(-\int a(x)dx)}b(x)dx + C\right) \tag{3}$$

En particular en nuestra ecuación (2):

$$a(x) = \frac{2}{x} \ \wedge \ b(x) = \frac{x}{2}$$

Por amor al orden, resolveremos las integrales por separado:

$$\int a(x)dx = \int \frac{2}{x}dx = 2\int \frac{1}{x}dx = 2ln(x)$$

Luego, podemos calcular el valor de la ecuación exponencial:

$$e^{\int a(x)dx} = e^{2ln(x)} = x^2$$

Así mismo:

$$e^{-\int a(x)dx} = e^{-2ln(x)} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

Podemos resolver la integral que está dentro del paréntesis de la ecuación (3):

$$\int e^{(-\int a(x)dx)}b(x)dx = \int \frac{1}{x^2}\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}ln(x)$$

Reemplazando los valores que hemos obtenido en la ecuación de Liebniz (3), tenemos que:

$$z(x) = x^2\left(\frac{1}{2}ln(x) + C\right)$$

$$z(x) = \frac{x^2}{2}ln(x) + x^2C$$

Está casi listo, solo nos falta volver a la variable original. Recordemos que $z = \sqrt{y}$:

$$\sqrt{y(x)} = \frac{x^2}{2}ln(x) + x^2C$$

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{2}ln(x) + x^2C\right)^2$$

Obteniendo así el resultado para la ecuación (1).

2. Ecuación de Ricatti

   La ecuación de Ricatti, que tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^2 + R(x) \tag{2.1}$$

   No se puede resolver de manera convencional, sin embargo, si se conoce una solución particular $y = y_1(x)$, se puede utilizar un cambio de variable para transformarla en una Ecuación de Bernoulli.

   El cambio de variable es:

$$y = y_1(x) + v$$

   Si derivamos esta expresión respecto a x, obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = y_1'(x) + \frac{dv}{dx}$$

   Podemos reemplazar ambas expresiones en la ecuación (2.1):

$$y_1'(x) + \frac{dv}{dx} = P(x)(y_1(x) + v) + Q(x)(y_1(x) + v)^2 + R(x)$$

   Resolviendo las operaciones:

$$y_1'(x) + \frac{dv}{dx} = P(x)y_1(x) + P(x)v + Q(x)(y_1^2(x) + 2y_1(x)v + v^2) + R(x)$$

$$y_1'(x) + \frac{dv}{dx} = P(x)y_1(x) + P(x)v + Q(x)y_1^2(x) + 2Q(x)y_1(x)v + Q(x)v^2 + R(x)$$

   Reordenando la ecuación:

$$y_1'(x) + \frac{dv}{dx} - P(x)y_1(x) - P(x)v - Q(x)y_1^2(x) - 2Q(x)y_1(x)v - Q(x)v^2 - R(x) = 0$$

   Agrupando términos:

$$\left(y_1'(x) - P(x)y_1(x) - Q(x)y_1^2(x) - R(x)\right) + \left(\frac{dv}{dx} - P(x)v - 2Q(x)y_1(x)v - Q(x)v^2\right) = 0$$

   Pero, recordemos que $y_1(x)$ es una solución particular de (2.1), por lo que:

$$\left(y_1'(x) - P(x)y_1(x) - Q(x)y_1^2(x) - R(x)\right) = 0$$

   Luego, la ecuación que teníamos se reduce a:

$$\frac{dv}{dx} - P(x)v - 2Q(x)y_1(x)v - Q(x)v^2 = 0$$

   Agrupando términos:

$$\frac{dv}{dx} = \big(P(x) + 2Q(x)y_1(x)\big)v + Q(x)v^2 \tag{2.2}$$

   Lo cual corresponde a una ecuación de Bernoulli.

3. Ejemplo de Ecuación de Ricatti

$$\frac{dy}{dx} - 2x^2 - \frac{y}{x} = -2y^2$$

Si reordenamos esta ecuación, obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}y - 2y^2 + 2x^2 \tag{3.1}$$

Lo cual tiene la forma de la ecuación de Ricatti. Notemos que $y = x$ es solución particular, ya que:

$$\frac{dx}{dx} = \frac{1}{x}x - 2x^2 + 2x^2$$
$$1 = 1$$

Entonces, tenemos que la solución particular $y_1 = x$. Entonces nuestro cambio de variable es tal que:

$$y = y_1(x) + v = x + v$$

Si lo derivamos respecto a x:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dv}{dx}$$

Reemplazando esto en la ecuación (3.1), obtenemos:

$$1 + \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}(x+v) - 2(x+v)^2 + 2x^2$$
$$1 + \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}x + \frac{1}{x}v - 2(x^2 + 2xv + v^2) + 2x^2$$
$$1 + \frac{dv}{dx} = 1 + \frac{1}{x}v - 2x^2 - 4xv - 2v^2 + 2x^2$$
$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}v - 4xv - 2v^2$$

Obteniendo finalmente:

$$\frac{dv}{dx} = \left(\frac{1}{x} - 4x\right)v - 2v^2 \tag{3.2}$$

Lo que corresponde a una ecuación de Bernoulli, con $n = 2$. Notar que si reemplazamos la ecuación (2.2) con las partes de la ecuación (3.1):

$$P(x) = \frac{1}{x} \ \wedge \ Q(x) = -2$$

Y la solución particular $y_1 = x$, el resultado sale de inmediato. Ahora, tenemos que resolver la ecuación (3.2) utilizando el método de Bernoulli. Como nuestro $n = 2$, el cambio de variable es tal que:

$$z = v^{1-n} = v^{1-2} = v^{-1} = \frac{1}{v}$$

$$z = \frac{1}{v}$$

Derivando por x, se obtiene que:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

Despejando $\frac{dv}{dx}$ de la ecuación (3.2), y reemplazando en la anterior se obtiene que:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{v^2}\left((\frac{1}{x} - 4x)v - 2v^2 \right)$$

Resolviendo las operaciones:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{v^2}(\frac{1}{x} - 4x)v - (-\frac{1}{v^2}2v^2)$$

$$\frac{dz}{dx} = -(\frac{1}{x} - 4x)\frac{1}{v} + 2$$

Recordemos que $z = \frac{1}{v}$:

$$\frac{dz}{dx} = -(\frac{1}{x} - 4x)z + 2 \tag{3.3}$$

Lo cual corresponde a una ecuación lineal. Para resolverla podemos usar el método de Liebniz, que recordemos es:

$$y(x) = e^{\int a(x)dx}\left(\int e^{(-\int a(x)dx)} b(x)dx + C \right)$$

En particular, para nuestra ecuación (3.3):

$$a(x) = 4x - \frac{1}{x} \ \wedge \ b(x) = 2$$

Resolviendo las integrales y la exponencial:

$$\int a(x)dx = \int (4x - \frac{1}{x})dx = \int 4xdx - \int \frac{1}{x}dx = 2x^2 - ln(x)$$

Así:

$$e^{2x^2 - ln(x)} = e^{2x^2}e^{-ln(x)} = \frac{e^{2x^2}}{x}$$

$$e^{-(2x^2 - ln(x))} = e^{ln(x) - 2x^2} = e^{ln(x)}e^{-2x^2} = \frac{x}{e^{2x^2}}$$

Por otro lado la integral dentro del paréntesis:

$$\int e^{(-\int a(x)dx)} b(x)dx = \int \frac{2x}{e^{2x^2}}dx$$

Nota: por temas de espacio, solo pondré el resultado de esta integral, pero recomiendo que de todas formas lo hagan ustedes por su cuenta(hint: usar cambio de variable $u = -2x^2$)

$$\int \frac{2x}{e^{2x^2}} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x^2}$$

Reemplazando todo lo que hemos calculado, en la ecuación de Liebniz, obtenemos que:

$$z(x) = \frac{e^{2x^2}}{x} \left(C - \frac{1}{2} e^{-2x^2} \right)$$

La ecuación, está casi lista, debemos volver a la variable original. Recordar que $z = \frac{1}{v}$:

$$\frac{1}{v(x)} = \frac{e^{2x^2}}{x} \left(C - \frac{1}{2} e^{-2x^2} \right)$$

Por otro lado $y = x + v$, es decir $v = y - x$:

$$\frac{1}{y(x) - x} = \frac{e^{2x^2}}{x} \left(C - \frac{1}{2} e^{-2x^2} \right)$$

Nota: Nuevamente por temas de espacio, no haré el despeje, recomiendo que de todas formas lo hagan ustedes por su cuenta. Finalmente obtenemos que la solución para la ecuación es:

$$y(x) = \frac{x}{Ce^{2x^2} - \frac{1}{2}} + x$$

4. Ejemplo Ecuación Exacta/Reducible a Exacta

Considere la siguiente ecuación:

$$(2y^2 + 3x)dx + (2xy)dy = 0 \tag{4.1}$$

La ecuación (4.1) tiene toda la pinta de ser exacta, pero lo será? Recordemos que para una ecuación sea exacta debe cumplir:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Entonces, veamos que pasa con nuestra ecuación. Para nuestro caso:

$$M = 2y^2 + 3x \ \wedge \ N = 2xy$$

Pero:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4y \ \wedge \ \frac{\partial N}{\partial x} = 2y$$

Por lo cual $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, y por lo tanto no se trata de una ecuación exacta. Sin embargo, podemos usar uno de los métodos vistos en clase para transformar la ecuación (1) en exacta. Recordemos el teorema:

Sea $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ una ecuación **no** exacta. Entonces la ecuación:

$$\varphi(x,y)M(x,y)dx + \varphi(x,y)N(x,y)dy = 0$$

Es exacta, es decir $\frac{\partial \varphi M}{\partial y} = \frac{\partial \varphi N}{\partial x}$.
El factor integrante $\varphi(x,y)$ puede ser de la forma:

$$\varphi(x,y) = e^{\int a(x)dx}, \text{ con } a(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \tag{4.N}$$

O de la forma:

$$\varphi(x,y) = e^{\int b(y)dy}, \text{ con } b(y) = \frac{-1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \tag{4.M}$$

La forma que se utiliza depende del caso. Para ilustrar mejor esto, intentemos resolver la ecuación (4.1) utilizando el método con el factor integrante que utliza M $(4.M)$

Para comenzar, es bueno resolver la resta desde antes:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 4y - 2y = 2y$$

Reemplezamos en el b(y) de la ecuación $(4.M)$:

$$b(y) = \frac{-1}{2y^2 + 3x}2y = \frac{-2y}{2y^2 + 3x}$$

Es decir:

$$b(y) = \frac{-2y}{2y^2 + 3x}$$

Pero llegamos a un problema, la ecuación $b(y)$ depende tanto de y como de x, cuando por definición solo puede depender de y, por lo tanto la forma $(4.M)$ no nos sirve :(
Probemos entonces con la forma $(4.N)$:

$$a(x) = \frac{1}{2xy}2y = \frac{1}{x}$$

Ahora si sirve :). Resolvemos la integral:

$$\int a(x)dx = \int \frac{1}{x}dx = ln(x)$$

Finalmente, resolvemos la ec. $(4.M)$:

$$\varphi(x,y) = e^{\int a(x)dx} = e^{ln(x)} = x$$

Por lo tanto, nuestro factor integrante es x. Multiplicamos (4.1) por el factor integrante:

$$\varphi(2y^2 + 3x)dx + \varphi(2xy)dy = 0$$

$$(2xy^2 + 3x^2)dx + (2x^2y) = 0 \tag{4.2}$$

Ahora comprobamos con nuestros nuevos M y N:

$$M' = 2xy^2 + 3x^2 \ \wedge \ N' = 2x^2y$$

$$\frac{\partial M'}{\partial y} = 4xy \ \wedge \ \frac{\partial N'}{\partial x} = 4xy$$

Se cumple $\frac{\partial M'}{\partial y} = \frac{\partial N'}{\partial x}$, por lo tanto la ec. (4.2) es exacta. Entonces, podemos resolverla utilizando el método visto en clase.

Como la ec. (4.2) es exacta, existe $F(x,y) = C'$ tal que:

$$\nabla F(x,y) = (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}) = (M', N')$$

Tenemos entonces la igualdad:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M' = 2xy^2 + 3x^2$$

Podemos integrar a ambos lados respecto a x:

$$\int \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)dx = \int \left(2xy^2 + 3x^2\right)dx$$

$$F = x^2y^2 + x^3 + C(y) \tag{4.3}$$

Con $C(y)$ una constante que depende de y. Para encontrarla, utilizaremos que $\frac{\partial F}{\partial y} = N'$, por lo que derivaremos a ambos lados respecto a y:

$$\frac{dF}{dy} = \frac{d(x^2y^2 + x^3 + C(y))}{dy}$$

$$N' = 2x^2y + 0 + \frac{d(C(y))}{dy}$$

De aquí, despejamos C(y) ordenando la expresión e integrando respecto a y:

$$\frac{d(C(y))}{dy} = N - 2yx^2$$

$$\int \left(\frac{d(C(y))}{dy}\right) dy = \int \left(N - 2yx^2\right) dy$$

$$C(y) = \int N' dy - \int (2yx^2) dy$$

$$C(y) = x^2y^2 - x^2y^2 = 0$$

Por lo tanto, nuestra constante que depende de y, es cero. Este no es siempre el caso , por eso me quise dar toda la vuelta. Entonces, reemplazamos en la ec. (4.3):

$$F = x^2y^2 + x^3$$

Ahora podemos despejar la solución de la ecuación (4.1):

$$F(x, y) = C'$$

$$x^2y^2 + x^3 = C'$$

$$y^2 = \frac{C' - x^3}{x^2}$$

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{C' - x^3}{x^2}}$$

Obteniendo así, la solución de la ecuación (4.1)