Solución para EDOs de 1er orden (2)

miércoles, 23 de septiembre de 2020 08:18

③ Sol. para EDOs exactos

Considere la ecuación

(1) $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

Def: (1) es exacta si existe $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

Prop: La ec. (1) es exacta si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

El método de sol. para ecuacións exacta es como sigue:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)\,dx \;/ \int$$

$$\partial x$$

$$\rightarrow F(x,y) = \int M\,dx + c(y) \Big/ \frac{d}{dy}$$

Como $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$

$$\frac{dF}{dy} = N = \frac{d}{dy}\int M\,dx + c'(y)$$

$$c'(y) = N - \int \frac{d}{dy} M\,dx \Big/ \int dy$$

$$c(y) = \int N\,dy - \int M\,dx + C$$

La sol implícita es dada por

$$F(x,y) = c$$

Ej 1) Resolver la ecuación

$$\underbrace{(3x^2+6xy^2)}_{M}\,dx + \underbrace{(6x^2y+4y^2)}_{N}\,dy = 0$$

Es exacta si: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

$12xy = 12xy$ ✓ es exacta

$$F(x,y) = \int M\,dx + C(y)$$

$$F(x,y) = \int (3x^2+6xy^2)\,dx + C(y)$$

$$F(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + C(y) \quad / \frac{d}{dy}$$

$$N(x,y) = 0 + 6x^2y + C'(y)$$

$$\cancel{6x^2y} + 4y^2 = \cancel{6x^2y} + C'(y)$$

$$\left(\frac{\partial C(y)}{}=\right) C'(y) = 4y^2 \quad / \int dy$$

$$C(y) = \int 4y^2\,dy$$

$$C(y) = \frac{4}{3}y^3 + C$$

Remplazando en (*) (Sol implícita F = 0)

$$F(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + \frac{4}{3}y^3 + C$$

$$\boxed{x^3 + 3x^2y^2 + \frac{4}{3}y^3 = C}$$

2) Sol. para EDOs que se reducen a exactas.

Def: Si $M\,dx + N\,dy = 0$ no es exacto $\left(\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}\right)$, se llama factor integrante a toda función $\mu = \mu(x,y)$ en D tal que

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$$

es exacta $\left(\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x} \right)$

obs : Es claro que si $y = y(x)$ es solución de $\mu M dx + \mu N dy = 0$ $\Rightarrow$ es solución de $M dx + N dy = 0$.

— o —

Vamos a ver dos formas para hallar el factor integrante facilmente.

F1] Cuando

$$\underbrace{\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)}\; = f(x) \;/\; \frac{d}{dx}$$

Sea μ el factor integrante

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu \cdot M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu \cdot N)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu \cdot M + \frac{\partial}{\partial y} M \cdot \mu = \frac{\partial}{\partial x}\mu \cdot N + \frac{\partial}{\partial x} N \cdot \mu$$

$$\mu\left[\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\mu \cdot N - \frac{d\mu}{dy} \cdot M$$

$$\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = \left(\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} \cdot N - \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} \cdot M\right)$$

$$\boxed{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = \frac{\partial}{dx}(\ln \mu) \cdot N - \frac{d(\ln \mu)}{dy} \cdot M}$$

EC. DE FACTOR INTEGRAN

Volvemos a la forma 1

$$\frac{1}{\cancel{N}}\left(\frac{d}{dx}(\ln u)\cancel{N} - \cancel{\frac{d(\ln u)}{dy}M}\right) = f(x)$$

$$d(\ln u) = f(x)$$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = f(x)$$

$$\frac{1}{u}\,du = f(x)\,dx \quad / \int$$

$$\int \frac{1}{u}\,du = \int f(x)\,dx$$

$$\boxed{u(x) = e^{\int f(x)\,dx}}$$

F2)

$$-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = g($$

$$\boxed{u(y) = e^{\int g(y)\,dy}}$$

Ejs!! (1) Resolver

$$\underbrace{\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)}_{M} dx + \underbrace{(x^2 + y^2)}_{N} d\ldots$$

$$¿\ \frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}\ ?$$

$$2x + x^2 + y^2 \neq 2x$$

No es exacta Busco F.I

F.I verifica $\frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = \ldots$

$$\frac{1}{N}\left(\cancel{2x} + x^2 + y^2 - \cancel{2x}\right) = \frac{x^2 \ldots}{x^2 \ldots}$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow \mu = e^{\int 1 \cdot dx} = e^{x}.$$

$$\underbrace{e^{x}\left(2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)}_{M} dx + \underbrace{e^{x}\left(x^2+y^2\right)}_{N}$$

$$\frac{dM}{dy} = 0(-) + e^{x}\left(2\cancel{y} + x^2 + \cancel{3}y^2\right)$$

$$\frac{dN}{dx} = e^{x}\left(x^2+y^2\right) + e^{x}\cdot 2x$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$$ es exacta

→ Tarea: termina ejerci

(5) Sol. para EDOs lineales.

Def: ① Una EDO lineal de 1 orden … la forma

$$(5)\ \frac{dy}{dx} = a(x)\,y + b(x) \qquad y' - a(x)\,y$$

② Si en (5) $b(x) = 0$, la ec lineal es homogenea, en caso contrario se dice no homogenea

obs: Si $b(x) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = + a$

$\Rightarrow$ que puedo resolver con variables separadas. Así el caso interesante para este tipo de EDOs es cuando $b(x) \neq$

Teorema (Liebnitz) La soluc

de (5) están dados por

$$y(x) = e^{\int a(x)\,dx}\left[\int e^{-\int a(x)\,dx} \cdot b(x)\,dx + c\right.$$

Dem (clase de Ayudantía)
se la debo

Ej) Solución $\frac{dy}{dt} = 2y + $

$a(t) = 2 \qquad b(t) = e^{t}$

$$y(t) = e^{\int 2\,dt}\left[\int e^{-\int 2\,dt} e^{t}\,dt + c\right]$$

$$y(t) = e^{2t}\left[\int e^{-2t} e^{t}\,dt + c\right]$$

$$y(t) = e^{2t}\left[-e^{-t} + c\right]$$

$$\boxed{y(t) = -e^{t} + c}$$

obs Liebniz resuelve EDOs line no homogeneas.

(6) Sol. para EDOS que se reducen a no homogeneas,

6.1) Forma de Bernoulli

Def | Una EDO de Bernoulli ti... la forma

$$(6.1) \qquad \frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^{n},$$

Multiplique ...

$$(6.1)^{*} \quad y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)\, y^{1-n} = f(x)$$

Sea $z = y^{1-n}$ $\Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = (1-n)\, y$

$\Rightarrow y^{-n}\dfrac{dy}{dx} = \boxed{\dfrac{1}{1-n}\dfrac{d}{d}}$

Reemplazando en $(6.1)^{*}$ $z = y^{1-n}$ y^{-n}

tengo

$$\frac{dz}{dx}\cdot\frac{1}{1-n} + p(x)\, z = f(x) \quad / \; 1-$$

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)\, p(x)\cdot z = (1$$

Ec. lineal q̇ depende

Bernoulli me permite reducir a u

EDO lineal mediante el cambio de

Variable

$$\boxed{z = y^{1-n}}$$

Ej Resolver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$$

Ec. Riccati: