TÓPICOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES
TAREA 1: EDOS DE 1ER ORDEN

Instrucciones: Escoger y resolver dos ejercicios de cada sección (diez en total). Escoger y grabar la solución paso a paso de un ejercicio de cada sección (cinco en total). Enviar documento final en formato pdf y video final en formato mp4 por correo a tamara.siles@ug.uchile.cl luis.sobarzo@uchile.cl y nelda.jaque@uchile.cl.

Fecha de entrega: Mircoles 7 de Octubre del 2020, 23:59 hrs.

1. Separación de Variables

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro *Ecuaciones diferenciales con álgebra lineal* de Albert L. Rabenstein, Ed. CECSA, México, 1973.

1.- $yy' = 4x, \quad y(1) = -3.$
2.- $xy' = 4y, \quad y(1) = -3.$
3.- $y' = 2xy^2, \quad y(2) = 1.$
4.- $y' = e^x(1-y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$
5.- $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}, \quad y(2) = 3.$
6.- $y' = e^y y' = 4, \quad y(0) = 2.$
7.- $2(y-1)y' = e^x, \quad y(0) = -2.$
8.- $2y' = y(y-2).$
9.- $3y^2y' = (1+y^3)\cos(x).$
10.- $\cos^2(x)y' = y^2(y-1)\sin(x).$

2. Ecuaciones Exactas

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro *Differential Equations with Boundary–Value Problems* de Denis G. Zill. PWS Publishers, Boston MA, 1986. Páginas 60–61.

Determine si las siguientes ecuaciones son exactas, si son exactas resuelvalas.

1.- $(2x+4)\,dx + (3y-1)\,dy = 0,$
2.- $(2x+y)\,dx - (x+6y)\,dy = 0,$
3.- $(5x+4y)\,dx + (4x-8y^3)) = 0,$
4.- $(\sin(y) - y\sin(x))\,dx + (\cos(x) + x\cos(y) - y)\,dy = 0,$
5.- $(2y^2x-3)\,dx + (2yx^2+4)\,dy = 0,$
6.- $\left(2y - \frac{1}{x} + \cos(3x)\right)\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y\sin(3x) = 0,$
7.- $(x+y)(x-y)\,dx + x(x-2y)\,dy = 0,$
8.- $\left(1 + \ln(x) + \frac{y}{x}\right)\,dx = (1-\ln(x))\,dy,$
9.- $(y^3 - y^2\sin(x) - x)\,dx + (3xy^2 + 2y\cos(x))\,dy,$
10.- $(x^3+y^3)\,dx + 3xy^2\,dy = 0.$

3. Ecuaciones Reducibles a Exactas

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro *Ecuaciones diferenciales elementales* de Earl D. Rainville. Editorial Trillas, México, 1973. Página 77.

1.- $(x^2 + y^2 + 1)\,dx + x(x - 2y)\,dy = 0$,
2.- $2y(x^2 - y + x)\,dx + (x^2 - 2y)\,dy = 0$,
3.- $y(2x - y + 1)\,dx + x(3x - 4y + 3)\,dy = 0$,
4.- $y(4x + y)\,dx - 2(x^2 - y)\,dy = 0$,
5.- $(xy + 1)\,dx + x(x + 4y - 2)\,dy = 0$,
6.- $(2y^2 + 3xy - 2y + 6x)\,dx + x(x + 2y - 1)\,dy = 0$,
7.- $y(y + 2x - 2)\,dx - 2(x + y)\,dy = 0$,
8.- $y^2\,dx + (3xy + y^2 - 1)\,dy = 0$,
9.- $2y(x + y + 2)\,dx + (y^2 - x^2 - 4x - 1)\,dx = 0$,
10.- $2(2y^2 + 5xy - 2y + 4)\,dx + x(2x + 2y - 1)\,dy = 0$.

4. Ecuaciones lineales

Los siguientes ejercicios son extraídos del libro *Ecuaciones diferenciales elementales* de Earl D. Rainville. Editorial Trillas, México, 1973. Páginas 52–53.

1.- $(x^5 + 3y)\,dx - x\,dy = 0$,
2.- $2(2xy + 4y - 3)\,dx + (x + 2)^2\,dy = 0$,
3.- $y' = x - 2y$,
4.- $(y + 1)\,dx + (4x - y)\,dy = 0$,
5.- $u\,dx + (1 - 3u)x\,du = 3u^2 e^{3u}\,du$,
6.- $u\,dx + (1 - 3u)x\,du = 3u\,du$,
7.- $y' = x - 4xy$,
8.- $y' = \operatorname{cosec}(x) + y\cot(x)$,
9.- $y' = \operatorname{cosec}(x) - y\cot(x)$,
10.- $(2xy + x^2 + x^4)\,dx - (1 + x^2)\,dy = 0$,
11.- $(y - \cos^2(x))\,dx + \cos(x)\,dy = 0$,
12.- $y' = x - 2y\cot(2x)$,
13.- $(y - x + xy\cot(x))\,dx + x\,dy = 0$,
14.- $y' - my = c_1 e^{mx}$,
15.- $y' - m_2 y = c_1 e^{m_1} x$ donde $m_1 \neq m_2$.

Los siguientes ejercicios corresponden al libro *Ecuaciones Diferenciales con Álgebra Lineal* de Albert L. Rabenstein, CECSA, México, 1973, página 36.

1.- Se dice que una función f es acotada en un intervalo I si existe un número M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in I$. Sea $q\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua y acotada en $[0, +\infty[$. Si $k > 0$, demuestre que cada solución de la ecuación diferencial
$$y' = -ky + q(x)$$
es acotada en $[0, +\infty[$.

2.- Con las mismas hipótesis del ejercicio anterior, demuestre que la ecuación diferencial
$$y' = ky + q(x)$$
tiene soluciones que no son acotadas en $[0, +\infty[$.

3.- Sea $q\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continua tal que

$$\lim_{x\to+\infty} q(x) = L.$$

Demuestre que toda solución $y(x)$ de la ecuación diferencial

$$y' = -ky + q(x)$$

verifica $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \frac{L}{k}$.

5. Ecuaciones Reducibles a Lineales

Encuentre la solución general de la ecuación de Bernoulli.

1.- $y' + y = xy^2$.
2.- $y' - 3y = xy^{-4}$.
3.- $x^2y' - xy = x^{-7}y^{1/2}$.
4.- $2y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}, \quad y(1) = 1$.
5.- $y^{1/2}y' + y^{3/2} = 1, \quad y(0) = 4$.
6.- $xy^2(xy' + y) = a^2$, con a constante.

Encuentre la solución general de la ecuación de Riccati.

1.- $y' = -e^{x^2}y^2 + 2x(e^{x^2} - 1)y + 1 + 2x^2 - x^2e^{x^2}$, con $y_p = x$.
2.- $y' - \sin^2(x)y^2 + \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}y + \cos^2(x) = 0$ con $y_p = \cot(x)$.
3.- $y' = \frac{2\cos^2(x) - \sin^2(x) + y}{2\cos(x)}$ con $y_p = \sin(x)$.