Solución para EDOs de primer orden

miércoles, 9 de septiembre de 2020 08:34

Métodos de Solución.

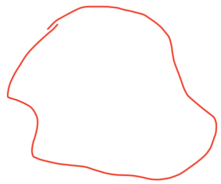
1. Para EDOS con Variables separadas ✓
2. Para EDOS que se reducen a V. separadas ✓
3. Para EDOS que son exactas
4. Para EDOS que se reducen a exactas con el Factor integrante
5. Para EDOS lineales
6. Para EDOS que se reducen a lineales con Bernolli y Ricatti

Considere la EDO de 1° orden de la forma de la forma

$$(*) \qquad y' = f(t, y(t)) \quad , \quad y' = \frac{dy}{dt}$$

donde $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

D



Def: Si existe $I \subset \mathbb{R}$ y una función diferenciable $\phi : I \to \mathbb{R}$ tal que $\forall t \in I$

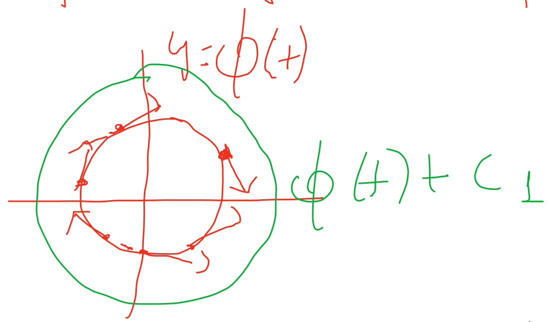
(1) $(t, \phi(t)) \in D$

(2) $\phi'(t) = y$ $\rightarrow$

$\Rightarrow \phi$ es solución de $(*)$

Obs: (1) La interpretación geométrica de $\underline{f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$ es que $f(t,y)$ es la pendiente de la recta que pasa por $(\phi(t), y)$ $\forall t \in I$

Ej: $D = \mathbb{R}^2$



② Si $\phi(t)$ es solución, entonces $\psi(t) = \phi(t) + C$ también es solución

Teo (Existencia y unicidad)

Sea D un cjto en $\mathbb{R}^2$ y $\underline{f}: D \to \mathbb{R}$ continua. Suponga que f tiene derivada con respecto a y $\forall (t,y) \in D$ y

$\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en D. Sea $(t_0, y_0) \in D$

$\Rightarrow$ La EDO $(*)$ tiene solución ϕ tal que $\phi(t_0) = y_0$. Además si ψ es también solución tq $\psi(t_0) = y_0$

$\Rightarrow \psi = \phi$.

① Solución para EDOs de V. Sep.

Considere la Ec. de la forma

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} = g(t) \cdot h(y)$$

Supongo que (1) está definida en un

conjunto abto $D \subset I \times J$ y que

$g: I \to \mathbb{R}$ y $h: J \to \mathbb{R}$ son continuas

sin perdida de generalidad, podemos escribir la ecuación de la forma

$$\frac{dy}{h(y)} = g(t)\,dt \quad / \int$$

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t)\,dt$$

$$\ln|h(y)| = \int g(t)\,dt + C$$

$$h(y) = K e^{\int g(t)\,dt}, \quad K = e^{C}$$

Es la solución implícita de (1).

Ej 1

① $$\frac{dy}{dt} = f(t)$$

$$\int dy = \int f(t)\,dt$$

$$\boxed{y = \int f(t)\,dt + C}$$

② $$\frac{dy}{dt} = ky$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int k\,dt$$

$$\ln|y| = kt + c \quad / \exp(\ast)$$

$$e^{\ln|y|} = e^{kt+c}$$

$$y = e^{c} \cdot e^{kt} \quad , \quad \tilde{c} = e^{c}$$

$$y = \tilde{c}\, e^{kt}.$$

③ $$\frac{dy}{dt} = \underline{2t} \cdot \underline{y^2}$$

$$\int y^{-2}\,dy = \int \frac{dy}{y^2} = \int 2t\,dt$$

$$\frac{y^{-2+1}}{-2+1} = t^2 + c$$

Dom $D = I \times J$

$= \mathbb{R} \times \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$1 \qquad t^2 + c$

$$= \frac{1}{y} = c$$

$$\boxed{y = \frac{-1}{t^2 + c}}$$

(1) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\cos^2 y}{h(y)}$

Obs: Para el éxito sol. el dominio I de f y de g y h deben ser continuos.

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = dt$$

tan

(2) Soluciones para EDOs que se reducen a V. Separadas

2.1) Considere la ec. de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(\cancel{x}, ax+by+c)$$

donde x, a, b, c ctes.

Sea $z = ax+by+c$

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = a + b f(x, z)$$

reduci a una ec. de v. separadas

Ej:

$$\frac{dy}{dx} = 3y - x$$

$\rightarrow z = 3y - x \quad / \frac{d(\cdot)}{dx}$

$\frac{dz}{dx} = 3\frac{dy}{dx} - 1$

Como $\frac{dy}{dx} = z$

Remplazando

$\frac{dz}{dx} = 3z - 1$

$\frac{dz}{3z-1} = dx \quad / \int(\cdot)$

$\int \frac{dz}{\underbrace{3z-1}_{u}} = \int dx$

$\frac{1}{3} \ln|3z-1| = x + c.$

$\ln|3z-1| = 3(x + c)$

$3c$

$$3z - 1 = e^{3x} \cdot \tilde{c} \quad , \quad \tilde{c} = e^{\tilde{c}}$$

$$\boxed{z = \frac{\tilde{c}\, e^{3x} + 1}{3}}$$

Volvemos a las incognitas iniciales

$$\longrightarrow \quad 3y - x = \bar{c}\, e^{3x} + \frac{1}{3} \quad , \quad \bar{c} = \frac{\tilde{c}}{3}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{y = \bar{c}\, e^{3x} + \frac{1}{9} + \frac{x}{3}}$$

2.2)

Considere la ec. de la forma

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f\left(\lambda \, , \, \frac{y}{x}\right)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow z_{(x)} \cdot x = y_{(x)} \quad / \frac{d}{dx}(x)$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot x + z = \frac{dy}{dx} \quad / \quad \frac{dy}{dx} = f(x, z)$$

$$\frac{dz}{dx} x + z = f(x, z) \qquad \text{reemplazo}$$

se puede separar variables

Ej

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{x}(1 + y/x)}{\cancel{x}\left(1 - \frac{y}{x}\right)}$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$z \cdot x = y \quad / \frac{d}{dx}(x)$$

$$\frac{dz}{dx} x + z = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx}x + z = \frac{1+z}{1-z}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx}x = \frac{1+z}{1-z} - z$$

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{1+z^2}{1-z}$$

$$\frac{1-z}{1+z^2}\,dz = \frac{dx}{x} \quad / \int$$

$$\int \frac{1}{1+z^2}\,dz - \int \frac{z}{1+z^2}\,dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ldots = \ln|x| + C$$

$$\arctan(z) - \frac{1}{2}\ln|t+1| =$$

· Podemos Dejar implícitamente la solución y volver a las variables originales

$$\boxed{\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y^2}{x^2}+1\right| = \ln|x| + C}$$

2.3) Ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad \text{donde}$$

f es homogenea de grado n, esto es,

$$\boxed{f(tx, ty) = t^n f(x,y)}$$

donde t, x, y es tal que $(tx, ty) \in D$

Si f es homogenea de grado 0, entonces

$$f(x,y) = f\left(x, x\cdot\frac{y}{x}\right) = x^0 f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

y volvemos al caso 2.2

2.4) Ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)$$

Busco una solución $(\overset{(x,y)}{\overset{\shortparallel}{h,k}})$ para ~~tal~~ el sistema

$$\boxed{\begin{aligned} ax+by+c &= 0 \\ dx+ey+f &= 0 \end{aligned}}$$

y el cambio de variable que considero para reducir a V. separada

$z = x - h$ $w = y - k$

$dz = dx$ $dw = dy$

$$\Rightarrow \frac{az + bw}{dz + ew} = \frac{ax + by + c}{dx + ey + f}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{dz}{dw} = f\left(\lambda, \frac{az + bw}{dz + ew}\right)}$$

q' tiene la forma de (2.2)

Ej:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 2}{x + y + 2}$$

(h,k):

$$x - y + 2 = 0$$
$$x + y + 2 = 0$$

$$\boxed{x = h = -2} \qquad \boxed{y = k = 0}$$

Cambio de variable para considerar

$z = x + 2 \qquad w = y$

$$\frac{dz}{dw} = \frac{z - w}{z + w} = \frac{\cancel{z}\left(1 - \frac{w}{z}\right)}{\cancel{z}\left(1 + \frac{w}{z}\right)}$$

Resolver con (2-2)

$$\boxed{\frac{dz}{dw} = \frac{1 - w/z}{1 + w/z}}$$