Noviembre 2020
Análisis Abstracto I
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile
Prof. Manuel Pinto J.
Ayt. Nelson Alvarado H.

Ayudantía 8

En la ayudantía anterior se estudió la integral de una función medible no negativa y trabajamos el Teorema de Convergencia Monótona. En esta ocasión trabajaremos la integral de una función medible arbitraria y, particularmente, veremos el Teorema de Convergencia Dominada, un resultado clásico que resulta de mucha utilidad.

Dada una función medible $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ definimos las funciones $f^+ : E \rightarrow \mathbb{R}$ y $f^- : E \rightarrow \mathbb{R}$ vía

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \\ 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Evidentemente, se tiene que tanto f^+ como f^- son funciones medibles y no negativas y por tanto podemos estudiar su integral con la teoría que ya hemos trabajado. Más aún, se tiene que $f = f^+ - f^-$. En ese contexto, decimos que f es integrable si y sólo si tanto f^+ como f^- son integrables (es decir, $\int f^+, \int f^- < \infty$). Definimos entonces

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

Como es de esperarse, la integrabilidad impone ciertas restricciones sobre la función (más allá del hecho de que por definición exigimos que sea medible).

Ejercicio 1: Sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Probar que f es integrable si y sólo si $|f|$ lo es.

Sol: Si f es integrable entonces f^+ y f^- son integrables. Ahora, como $|f| = f^+ + f^-$ (y tanto f^+ como f^- son no negativas) concluimos por linealidad que $|f|$ es integrable.

Supongamos ahora que $|f|$ es integrable, en cuyo caso $\int_E |f| < \infty$. Como $f^+ \leq |f|$ y $f^- \leq |f|$ se sigue por monotonía (y, nuevamente, el hecho de que f^+, f^- son no negativas) que f^+ y f^- son integrables.

Comentario: Notar que si no consideramos la hipótesis de que f sea medible entonces no es necesariamente cierto que la integrabilidad de $|f|$ sea equivalente a la de f . Por ejemplo, sea $V \subseteq [0, 1]$ un conjunto no medible (ya hemos discutido la existencia de este tipo de conjuntos) y consideremos la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = 1 - 2\chi_V(t)$. Más concretamente:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \notin V \\ -1 & \text{si } t \in V \end{cases}.$$

En particular $|f|$ es la función constante 1 (que es integrable en $[0, 1]$) mientras que f no es medible (en particular no integrable). De manera similar, considerando $g = 1 - 2\chi_{\mathbb{Q}} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ obtenemos un ejemplo de una función cuyo valor absoluto es Riemann integrable sin que la función misma lo sea.

Cuando introdujimos la integral de Lebesgue hicimos notar que en un gran número de casos esta nueva integral coincide con la de Riemann. Más precisamente, vimos que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada que es Riemann-integrable entonces f es Lebesgue-integrable y

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{[a,b]} f.$$

Ahora bien, comentamos también que, *propriadamente* hablando, no podemos integrar en el sentido de Riemann sobre un dominio que no sea un intervalo acotado: necesariamente una integral de la forma

$$\int_0^\infty f(t) dt$$

debe verse como un límite y, en ese contexto, no tiene mayor sentido decir que f es Riemann-integrable en $(0, \infty)$. Por lo tanto, no hay una forma directa de comparar ambas nociones en ese caso. Más aún, se tiene lo siguiente:

Problema 1: La función $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \frac{\text{sen}(t)}{t}$ es un ejemplo en que la integral impropia de Riemann es finita pero que no es integrable en el sentido de Lebesgue. Es decir, hablando de manera informal (y errónea), «Riemann-integrable **no** implica Lebesgue-integrable en dominios de medida infinita.»

Sol:

- La integral de Riemann impropia de f es finita. Por completitud (y en parte por «cultura general») daremos una idea de cómo evaluar esta integral, sin embargo, esto no es tan relevante para nuestros propósitos. Por lo tanto, la lectura del desarrollo siguiente puede omitirse en primera instancia.

Notar que si $t > 0$ entonces

$$\int_0^\infty e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$$

y por tanto se tiene que

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-tx} \text{sen}(x) dt dx.$$

Usando el teorema de Fubini (que conoce de Cálculo en varias variables, justifique por qué puede usarse) podemos intercambiar el orden de integración para integrar primero respecto a x y luego respecto a t . Integrando por partes (dos veces) se puede ver que

$$\int_0^\infty e^{-tx} \text{sen}(x) dx = \frac{1}{1+t^2}.$$

Así vemos que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} < \infty,$$

como se quería.

- Ahora veamos por qué esta función no es Lebesgue-integrable. Si lo fuera entonces, por ejercicio 1, tendríamos que $|f|$ también sería integrable. Sin embargo tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{(0,\infty)} \left| \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} \right| &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[n\pi, (n+1)\pi]} \frac{|\operatorname{sen}(t)|}{t} \\ &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{[n\pi, (n+1)\pi]} \frac{|\operatorname{sen}(t)|}{(n+1)\pi} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \cdot \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \operatorname{sen}(t) \right) \\ &= 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \\ &= \infty, \end{aligned}$$

donde en la primera línea se usó la prop. 4.11 del libro de Royden (σ -aditividad de la integral sobre dominios disjuntos), en la segunda la monotonía, en la cuarta el hecho de que para una función acotada sobre un intervalo la integral de Lebesgue coincide con la de Riemann (y calcular la integral del seno en un intervalo $[n\pi, (n+1)\pi]$ es sencillo) mientras que en la última línea usamos simplemente el hecho de que la serie armónica diverge.

Comentario: Se puede demostrar (problema planteado en el libro de Royden) que en caso de que f sea integrable Lebesgue entonces la integral impropia de Riemann coincide con la de Lebesgue.

Problema 2: Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible no negativa tal que la integral de Riemann impropia existe. Entonces f es también Lebesgue integrable y

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt.$$

Sol: Sea $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f_n = f \chi_{[-n, n]}$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ y, más aún, como f es no negativa se tiene que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall x \in \mathbb{R}$. De esta forma, como cada f_n es medible concluimos por el TCM que

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

Por otro lado

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-n, n]} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt < \infty.$$

Así concluimos que f es Lebesgue integrable y

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt,$$

como se quería.

Problema 3: (*Lema de Riemann-Lebesgue*) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable-Lebesgue entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f \cdot \text{sen}(n \cdot) = 0.$$

Sol: Usaremos fuertemente el siguiente resultado, que se desprende directamente del problema 15 del libro de Royden (el cual, por supuesto, se le invita a hacer):

Si $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un intervalo cerrado K tal que

$$\int_{E-K} |g| < \varepsilon$$

y una función simple φ con soporte en K tal que

$$\int_E |g - \varphi| < \varepsilon.$$

Sea entonces f una función como la del enunciado del problema. Por lo dicho anteriormente existe un intervalo acotado K_ε y una función simple φ_ε con soporte en K_ε tal que

$$\int_{K_\varepsilon^c} |f| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad \int_{K_\varepsilon} |g - \varphi_\varepsilon| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ahora, como $0 \leq |f(t) \cdot \text{sen}(nt)| \leq |f(t)|$, tenemos que

$$\int_{K_\varepsilon^c} |f \cdot \text{sen}(n \cdot)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De esta forma, dado $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} f \cdot \text{sen}(n \cdot) \right| &\leq \left| \int_K f \cdot \text{sen}(n \cdot) \right| + \left| \int_{K^c} f \cdot \text{sen}(n \cdot) \right| \\ &< \left| \int_K f \cdot \text{sen}(n \cdot) \right| + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \int_K |(f - \varphi) \cdot \text{sen}(n \cdot)| + \int_K |\varphi \cdot \text{sen}(n \cdot)| + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \int_K |f - \varphi| + \int_K |\varphi \cdot \text{sen}(n \cdot)| + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \int_K |\varphi \cdot \text{sen}(n \cdot)| + \frac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Finalmente, notemos que como φ es simple, φ es acotada, digamos por una constante $M > 0$. De esta forma,

$$\int_K |\varphi \cdot \text{sen}(n \cdot)| \leq M \int_K |\text{sen}(n \cdot)|.$$

Recordemos que $K = [-a, a]$ para algún $a > 0$. Más aún, podemos suponer que $a = 2\pi k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Así, usando el hecho de que las integrales de Riemann y Lebesgue coinciden para funciones integrables sobre un intervalo, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_K |\varphi \cdot \text{sen}(n \cdot)| &= 2 \int_{[0, 2\pi k]} |\varphi \cdot \text{sen}(n \cdot)| \\ &= 2 \sum_{j=0}^{k-1} \int_{[2\pi j, 2\pi(j+1)]} |\varphi \cdot \text{sen}(n \cdot)| \\ &\leq 2M \sum_{j=0}^{k-1} \int_{[2\pi j, 2\pi(j+1)]} |\text{sen}(n \cdot)| \\ &= 2M \sum_{j=0}^{k-1} \int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} |\text{sen}(nt)| dt \\ &= 4kM \int_0^\pi \text{sen}(nt) dt \\ &\leq \frac{8kM}{n} \\ &= \frac{4aM}{n\pi} \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

De esta forma, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_K |\varphi \cdot \text{sen}(n \cdot)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

si $n \geq N$. Así para $n \geq N$ se tiene que

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f \cdot \text{sen}(n \cdot) \right| < \varepsilon$$

y por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f \cdot \text{sen}(n \cdot) = 0,$$

como se quería.

Ejercicio: Replicar este desarrollo para probar que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable entonces se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f \cdot \cos(n \cdot) = 0.$$

A continuación veremos un par de aplicaciones del teorema de convergencia dominada de Lebesgue, el cual en lo que sigue denotaremos por TCD. Recordemos que este teorema dice lo siguiente:

TCD: Sea $\{f_n : E \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables y $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable tal que $|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ y } \forall x \in E$. Si $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ para casi todo $x \in E$ entonces se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

Problema 4: (*Derivación bajo el signo integral*) Sean A un subconjunto medible de $\mathbb{R}$, B un intervalo finito y $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface que:

- a) Para cada $(x, t) \in A \times B$ la derivada parcial $(\partial f / \partial t)(x, t)$ existe (es decir, para cada x la función $f_x : B \rightarrow \mathbb{R} : t \rightarrow f(x, t)$ es derivable)
- b) Para cada $t \in B$ la función $f_t : A \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x, t)$ es medible
- c) Para algún $t_0 \in B$ la función f_{t_0} es integrable
- d) Existe una función $\Theta : A \rightarrow \mathbb{R}$ **integrable** tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq \Theta(x) \quad \forall x \in A \text{ y } \forall t \in B$$

Entonces se tiene que la función $F : B \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(t) := \int_A f_t$$

es derivable y, más aún,

$$F'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

En otras palabras:

$$\frac{d}{dt} \int_B f(x, t) dx = \int_B \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

Sol: Veamos primero que la asignación F define realmente una función (es decir, que f_t es integrable para todo t). Sea entonces $t \in B$. Por a) tenemos que para cada $x \in A$ la función f_x es derivable. De esta forma, por el teorema del valor medio existe $\xi_x \in (t_0, t)$ tal que

$$f_x(t) = f_x(t_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi_x) \right) \cdot (t - t_0)$$

y por tanto

$$|f_x(t)| \leq |f_x(t_0)| + \left| \left(\frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi_x) \right) \cdot (t - t_0) \right| \leq |f_x(t_0)| + m(B) \cdot |\Theta(x)|.$$

Ahora, notando que $f_x(t) = f_t(x)$ vemos que para todo $x \in A$ se tiene que

$$|f_t(x)| \leq |f_{t_0}(x)| + m(B) \cdot |\Theta(x)|.$$

De esta forma f_t es acotada superiormente por la función integrable $|f_{t_0}(x)| + m(B) \cdot |\Theta(x)|$. Así, como f_t es medible (por b)) concluimos que f_t es integrable, como se quería.

Veamos ahora que la integral sobre A de $(\partial f / \partial t)(x, t)$ existe. Para ello notemos que para cada $t \in B$ fijo se tiene que la función $x \rightarrow (\partial f / \partial t)(x, t)$ es límite puntual de funciones medibles y por tanto es medible. Ahora, por d) sabemos que esta función es acotada por una función integrable y por tanto concluimos (al ser una función medible acotada por una integrable) que es integrable, como se quería.

Resta entonces ver que se tiene la igualdad deseada. Sea $t \in B$ fijo y $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en B con $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = t$. Consideremos la sucesión $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ dada por

$$H_n = \frac{F(u_n) - F(t)}{u_n - t} - \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x, t).$$

Para probar la igualdad que queremos basta probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = 0$. Ahora bien, notemos que

$$H_n = \int_A \varphi_n,$$

donde $\varphi_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ es la función dada por

$$\varphi_n(x) = \frac{f(x, u_n) - f(x, t)}{u_n - t} - \frac{\partial f}{\partial t}(x, t).$$

Por definición de derivada tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0$ para todo $x \in A$. De esta forma, para probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = 0$ bastará probar que la sucesión $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisface las hipótesis del TCD. Como ya señalamos, cada φ_n es integrable. Resta probar la existencia de una función dominante. Para ello notemos que, por TVM, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\xi_{n,x} \in (u_n, t)$ tal que

$$f(x, u_n) - f(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi_{n,x}) \cdot (u_n - t)$$

y por tanto

$$\left| \frac{f(x, u_n) - f(x, t)}{u_n - t} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi_{n,x}) \right| \leq \Theta(x).$$

De esta forma tenemos que

$$|\varphi_n(x)| \leq 2\Theta(x) \quad \forall x \in A.$$

Así, como 2Θ es una función integrable (por hipótesis) concluimos lo que se quería.

Problema 5: Asumiendo que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ (hecho que puede comprobarse, por ejemplo, usando creativamente el Teorema de Fubini en $\mathbb{R}^2$) pruebe que

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Sol: Consideremos la función $f : \mathbb{R} \times [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, t) = e^{-t^2 x^2}$. Veremos que se satisfacen las hipótesis del problema 4. Las condiciones a) y b) se satisfacen directamente (*¿por qué?*). Ahora bien, f_1 es una función no negativa, medible cuya integral impropia de Riemann es finita. Por lo tanto por el problema 2 concluimos que f_1 es Lebesgue integrable y por tanto la condición c) del problema 4 también se cumple. Resta entonces encontrar una función dominante. Para ello notemos que para todo $t \in [1, 2]$ se tiene que

$$|e^{-t^2 x^2}| \leq e^{-x^2}$$

y la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow e^{-x^2}$ es integrable. De esta forma concluimos que la condición d) también se satisface.

Sea entonces $F : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $F(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2 x^2} dx$. Por lo visto en el párrafo anterior sabemos que las hipótesis del problema 3 se satisfacen y por tanto tenemos que

$$F'(t) = -2t \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-t^2 x^2} dx.$$

Por otro lado, del hecho de que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

podemos ver (usando el problema 2, ejercicio) que

$$F(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{t}.$$

De esta forma se tiene que

$$F'(t) = -\frac{\sqrt{\pi}}{t^2}.$$

Así tenemos que

$$2t \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-t^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{t^2} \quad \forall t > 0.$$

En particular, tomando $t = 1$ vemos que

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

como se quería.

Ejercicio: Generalice el desarrollo anterior para calcular

$$\int_{\mathbb{R}} x^{2n} e^{-x^2} dx.$$