

Septiembre 2020
Análisis Abstracto I
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile
Prof. Manuel Pinto J.
Ayt. Nelson Alvarado H.

Ayudantía Semana 4: Funciones medibles

En las diversas áreas de la matemática suelen estudiarse diversos tipos de objetos y estructuras. Por ejemplo, en Álgebra Lineal, se estudian espacios vectoriales, en Análisis, se estudian espacios métricos y en Topología se estudian espacios topológicos. Ahora bien, usualmente suele irse más allá: no sólo interesan los objetos en sí mismos sino que, además, se vuelve muy relevante estudiar la forma en que estos objetos se relacionan entre sí. La forma natural de relacionar objetos es a través de «buenas funciones» y es por ello que en un curso usual de Álgebra Lineal dedicamos mucho tiempo no sólo a estudiar espacios vectoriales sino que también a estudiar *Transformaciones Lineales* y en un curso de Análisis no sólo estudiamos espacios métricos y sus propiedades, sino que también estudiamos *funciones continuas* y cómo éstas permiten obtener conclusiones acerca de un espacio usando lo que sabemos acerca de otro¹.

En nuestro caso, la «estructura» que estamos estudiando consiste en el espacio métrico $\mathbb{R}$ equipado con una σ -álgebra $\mathcal{M}$, consistente en los subconjuntos Lebesgue-medibles y una función $m : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, la medida de Lebesgue. En este contexto, las funciones que nos interesarán deben estar en estrecha relación con estos conjuntos medibles. Por otro lado, la medida m está construida en estrecha relación con ciertos conjuntos especiales: los Boreleanos. La σ -álgebra $\mathcal{B}$ de los Boreleanos es la σ -álgebra más pequeña que contiene a los abiertos de $\mathbb{R}$ o, equivalentemente, que contiene a todos los intervalos de la forma $(a, +\infty)$. En ese sentido, la siguiente definición no debiese resultar demasiado extraña:

Sea $X \subseteq \mathbb{R}$. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ se dice *Lebesgue-Borel-medible*² si el conjunto $f^{-1}((a, \infty)) = \{x \in X : f(x) > a\}$ es medible para todo $a \in \mathbb{R}$.

¹En la matemática moderna, la filosofía de «estudiar *morfismos* más que *objetos*» se manifiesta en la *Teoría de Categorías*, que tiene un fuerte asidero en áreas como la Topología y la Geometría Algebraica.

²En términos abstractos, un *espacio de medida* es un triple $(X, \mathcal{M}, \mu)$ compuesto por un conjunto X , una σ -álgebra $\mathcal{M}$ en X y una función σ -aditiva $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ con $\mu(\emptyset) = 0$. En este contexto abstracto, una función $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{N}, \lambda)$ es medible si la preimagen de cualquier medible en Y es medible en X . En el caso que estamos estudiando, nos interesan funciones desde $(X, \mathcal{M}, m)$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m|_{\mathbb{R}})$

Para empezar, precisaremos un poco las ideas planteadas en el párrafo anterior:

Problema 1:

- a) Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es LB-medible si y sólo si la preimagen de cualquier abierto $O \subseteq \mathbb{R}$ es medible Lebesgue.
- b) Deducir que toda función continua con dominio medible es LB-medible

Sol:

- a) $\Leftarrow$ Como todo intervalo $(a, +\infty)$ es abierto se tiene, por hipótesis, que $f^{-1}((a, +\infty))$ es medible y, por tanto, nuestra definición de LB-medible implica inmediatamente que f es LB-medible
 $\Rightarrow$ Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función LB-medible y O un abierto de $\mathbb{R}$. Debemos verificar que $f^{-1}(O) := \{x \in X : f(x) \in O\}$ es Lebesgue medible. Tenemos que todo abierto O es unión numerable de intervalos abiertos

$$I_k = (a_k, b_k) = (-\infty, b_k) \cap (a_k, +\infty).$$

De esta forma tenemos que

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-1}(I_k) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (f^{-1}(-\infty, b_k) \cap f^{-1}(a_k, +\infty)).$$

Como f es LB-medible se tiene que $f^{-1}(a_k, +\infty)$ es Lebesgue medible. Ahora, por proposición 3.18 se tiene que $f^{-1}(-\infty, b_k)$ es también medible (pues f es LB-medible). Así, como los conjuntos Lebesgue-medibles forman una σ -álgebra se concluye que $f^{-1}(O)$ es LB-medible, como se quería.

- b) Por definición se tiene que si una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es continua entonces $f^{-1}(O)$ es un abierto en X . Ahora, todo abierto en $X \subseteq \mathbb{R}$ es la intersección de X con un abierto de $\mathbb{R}$. De esta forma, como X es medible y los abiertos (de $\mathbb{R}$) son medibles, se concluye que $f^{-1}(O)$ es medible. Así, como O es un abierto arbitrario de $\mathbb{R}$ concluimos por la parte a) de este problema que f es LB-medible.

A continuación, precisaremos algunos comentarios hechos en el libro de Royden sobre ciertas funciones que son medibles:

Problema 2:

- a) Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función creciente (no necesariamente estrictamente creciente) con dominio medible entonces f es medible
- b) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es medible y $X \subseteq \mathbb{R}$ entonces la restricción de f a X es medible.
- c) Sea X un subconjunto medible de $\mathbb{R}$ y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Si $X = A \cup B$ con A, B medibles entonces f es LB-medible si y sólo si $f|_A$ y $f|_B$ son medibles

- d) Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}$. Se tiene que la función característica χ_E de E es medible si y sólo si E es medible.

Sol:

- a) Probaremos que para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene que el conjunto $A_a := f^{-1}((-\infty, a])$ es medible. Sea $c := \inf\{f(x) : x \in X\}$. Si $a < c$ entonces $A_a = \emptyset$ y $\emptyset$ es medible.

Supongamos ahora que $a \geq c$, de modo que $A_a \neq \emptyset$. Afirmamos que A_a es la intersección de X con un intervalo y, por tanto, en tal caso A_a es también medible (por ser intersección de medibles). Distinguiremos dos casos: i) A_a acotado y ii) A_a no acotado.

En el primer caso, sea $b_a = \sup A_a$. En tal situación se tiene, por definición, que $A_a \subseteq (-\infty, b_a]$ y, por tanto, $A_a \subseteq (-\infty, b_a] \cap X$. Si $b_a \in A_a$ entonces, como f es creciente, se obtiene que $f(x) \leq f(b_a) \leq a$ para todo $x \in (-\infty, b_a] \cap X$ y, por tanto, en tal caso $A_a = (-\infty, b_a] \cap X$. Afirmamos que si $b_a \notin A_a$ entonces $A_a = (-\infty, b_a) \cap X$. Como $b_a \notin A_a$ tenemos, de manera análoga a lo hecho antes, que $A_a \subseteq (-\infty, b_a) \cap X$. Ahora, como $b_a = \sup A_a$ para cada $\varepsilon > 0$ existe $y_\varepsilon \in A_a$ tal que $b_a - \varepsilon < y_\varepsilon$. En particular, tomando $\varepsilon = \frac{b_a - x}{2}$ existe $y_\varepsilon \in A_a$ tal que

$$\frac{x + b_a}{2} < y_\varepsilon.$$

Ahora, como

$$x < \frac{x + b_a}{2}$$

lo anterior implica que

$$x < y_\varepsilon$$

y, por tanto, como f es creciente e $y_\varepsilon \in A_a$ se concluye que

$$f(x) \leq f(y_\varepsilon) \leq a,$$

como se quería.

Supongamos ahora que A_a no es acotado. Afirmamos que en tal caso $A_a = X$. Si no, entonces existiría $x \in X$ con $x \notin A_a$. Como A_a no es acotado, existe $y \in A_a$ con $y \geq x$. Ahora, como f es creciente, esto implica que $f(y) \geq f(x)$. Ahora, como $x \notin A_a$ esto último implica que $f(y) > a$, contradiciéndose el hecho de que $y \in A_a$.

Ejercicio: Probar que una función decreciente con dominio medible es medible

- b) Sea $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ la restricción de f a X . En tal caso se tiene que

$$g^{-1}((-\infty, a)) = \{x \in X : g(x) < a\} = \{x \in X : f(x) < a\} = f^{-1}((-\infty, a)) \cap X$$

y este conjunto es medible por ser intersección de medibles.

c) La implicancia $\Rightarrow$ es directa de lo probado en la parte b). Para la otra implicancia notemos que

$$\begin{aligned} f^{-1}((-\infty, a)) &= \{x \in A \cup B : f(x) < a\} \\ &= \{x \in A : f(x) < a\} \cup \{x \in B : f(x) < a\} \\ &= (f|_A)^{-1}(-\infty, a) \cup (f|_B)^{-1}(-\infty, a) \end{aligned}$$

d) Si χ_E es medible entonces el conjunto $\chi_E^{-1}([1, \infty))$ es medible. Ahora bien, por definición de la función característica se tiene que $E = \chi_E^{-1}([1, \infty))$ y, por tanto, concluimos que E es medible. Recíprocamente, si E es medible entonces

$$\chi_E^{-1}([a, \infty)) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } a \leq 0 \\ E & \text{si } a \in (0, 1] \\ \emptyset & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

En cualquiera de los casos se tiene que $\chi_E^{-1}([a, \infty))$ es medible.

A continuación trabajaremos un poco un tipo especial de funciones medibles: las funciones simples. Esto es, funciones de la forma

$$\sum_{k=1}^r a_k \chi_{E_k},$$

donde cada E_k es medible. Estas funciones adquirirán un rol fundamental a la hora de definir la integral de Lebesgue.

Problema 3: *Lema de aproximación por funciones simples* Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Se tiene que para cada $\varepsilon > 0$ existen funciones simples $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ tales que

$$\varphi_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \psi_\varepsilon(x) \quad \forall x \in X$$

y

$$\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x) < \varepsilon \quad \forall x \in X.$$

Sol: Sea $[c, d]$ un intervalo que contenga a la imagen de f (el cual existe puesto que f es acotada) y $\{a_k\}_{k=0}^r$ una partición de (c, d) tal que $a_{k+1} - a_k < \varepsilon$, esto es:

$$c = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_r = d.$$

Definimos $I_k := [a_k, a_{k+1})$ y $E_k = f^{-1}(I_k)$. Como cada I_k es medible y f es LB-medible se tiene que E_k es medible para cada k . De esta forma, definimos las funciones simples

$$\varphi_\varepsilon = \sum_{k=0}^{r-1} a_k \chi_{E_k}(x)$$

y

$$\psi_\varepsilon = \sum_{k=0}^{r-1} a_{k+1} \chi_{E_k}(x).$$

Por construcción φ_ε y ψ_ε son simples. Ahora, como los I_k son disjuntos, para cada x existe un único k tal que $x \in E_k$. Ahora, si $x \in E_k$ entonces $f(x) \in [a_k, a_{k+1})$ y, por tanto, en tal caso se tiene que

$$\varphi_\varepsilon(x) = a_k \leq f(x) < a_{k+1} = \psi_\varepsilon(x).$$

Más aún,

$$\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x) = a_{k+1} - a_k < \varepsilon.$$

Problema 4: El límite puntual de funciones medibles es medible

Sol: Problema 3 tarea 2

Problema 5: Una función $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ es medible si y sólo si es el límite puntual de funciones simples $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con la propiedad de que $|\varphi_n(x)| \leq |f(x)|$ para todo $x \in X$.

Sol: $\Leftarrow$ Las funciones simples son medibles por definición. Así, por el problema 4, se concluye lo que se quiere.

$\Rightarrow$ Sea f una función medible. En lo que sigue supondremos que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$. Queda como ejercicio adaptar los argumentos que siguen al caso general. Sea $E_n := \{x \in X : f(x) \leq n\}$ y f_n la restricción de f a E_n . Como f es medible se tiene que E_n es medible y, por tanto por problema 2 parte b) se sigue que f_n es medible. Como f_n es medible y acotada se tiene, por problema 3, que existen funciones simples $\varphi_n, \psi_n : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\varphi_n(x) \leq f_n(x) \leq \psi_n(x) \quad \text{y} \quad 0 \leq \varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x) \quad \forall x \in E_n.$$

Más aún, bajo la suposición de que f sea no negativa vemos, de la solución mostrada al problema 3, que podemos imponer $\varphi_n(x) \geq 0$. De esta forma tenemos que

$$0 \leq f(x) - \varphi_n(x) \leq \psi_n(x) - \varphi_n(x) < \frac{1}{n} \quad \forall x \in X. \quad (1)$$

Ahora, extendemos φ_n a una función cuyo dominio sea todo X imponiendo que $\varphi_n(x) = 0$ si $f(x) > n$. Afirmamos que estas funciones $\varphi_n : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ forman una sucesión de funciones simples que converge puntualmente a f . Para probar esta afirmación debemos probar que para cada $x \in X$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x).$$

Para ello distinguiremos dos casos:

- Si $f(x) < \infty$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) < N$ y, por tanto, $x \in E_n$ para todo $n \geq N$. De esta forma, por (1) vemos, tomando $n \rightarrow \infty$ que $\varphi_n(x) \rightarrow f(x)$.
- Si $f(x) = \infty$ entonces $\varphi_n(x) = 0$ y por tanto se tiene trivialmente que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$.