Análisis Abstracto I
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile
Prof. Manuel Pinto J.
Ayt. Nelson Alvarado H.

Tarea 4

Fecha de entrega: 30 de Noviembre

I. Decida justificadamente si las siguientes aserciones son verdaderas o falsas.

1. Si $f : E \to \mathbb{R}$ es una función medible y no negativa tal que $\int_E f = 0$ entonces $f = 0$ c.t.p.
2. Si $f : E \to \mathbb{R}$ es una función integrable y g es una función medible entonces la función fg (producto puntual) es integrable.
3. Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ y $T_{t_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $T_{t_0}(x) = x + t_0$. Se tiene que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es integrable entonces
$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} f \circ T_{t_0}.$$
4. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es integrable entonces $\lim_{n\to\infty} f(x) = 0$.

II. Sea C el conjunto de Cantor y $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1+2t}{5-t}} & \text{si } t \in C \\ n & \text{si } t \notin C \text{ y } t \text{ está en un intervalo de largo } 3^{-n} \end{cases}.$$

Calcule justificadamente la integral de f en $[0,1]$.

III. Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto medible, B un intervalo finito y $f : A \times B \to \mathbb{R}$ una función que satisface que:

1. Para cada $x \in A$ la función $f_x : B \to \mathbb{R} : t \to f(x,t)$ es continua
2. Para cada $t \in B$ la función $f_t : A \to \mathbb{R} : x \to f(x,t)$ es medible
3. Existe una función integrable $\Theta : A \to \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x,t)| \leq \Theta(x) \quad \forall x \in A \;\text{ y }\; t \in B.$$

Entonces la asignación $t \to \int_A f_t$ define una función continua.

IV.

1. Calcular justificadamente

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$$

2. Calcular justificadamente

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^k x^n \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k dx$$