

Octubre 2020
Análisis Abstracto I
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile
Prof. Manuel Pinto J.
Ayt. Nelson Alvarado H.

Ayudantía 7

En la ayudantía anterior introdujimos la integral de Lebesgue para el caso de funciones $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ **medibles y acotadas** definidas sobre un dominio medible de medida **finita**. Lo que haremos en esta oportunidad será extender esta definición al caso de funciones cuyo dominio sea un conjunto medible de medida arbitraria. Para ello estudiaremos primero el caso de funciones **no negativas** para posteriormente atacar el caso general.

Comentario: En este documento «creciente» (resp. decreciente) **no** significa «estrictamente creciente» (resp. estrictamente decreciente)

En primer lugar recordemos que una función $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ se dice de **soporte finito** si

$$m(\{x \in A : h(x) \neq 0\}) < \infty.$$

Se define la integral (de Lebesgue) de una función medible no negativa $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\sup \left\{ \int_E h : h \leq f, h \text{ medible, acotada y de soporte finito} \right\},$$

donde este supremo podría eventualmente ser infinito. Cuando $\int_E f < \infty$ decimos que la función en cuestión es **integrable**.

Recordemos que para una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de números reales se definen

$$\liminf a_n := \sup_{k \in \mathbb{N}} \inf\{a_j : j \geq k\}$$

y

$$\limsup a_n := \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup\{a_j : j \geq k\}.$$

Comentario: Notamos que la sucesión $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dada por

$$b_k = \inf\{a_j : j \geq k\}$$

es monótona creciente y, análogamente, la sucesión $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dada por

$$c_k = \sup\{a_j : j \geq k\}$$

es monótona decreciente. En particular $\liminf a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ y $\limsup a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ existen o son infinito (no hay «oscilaciones»). Notar también que siempre se tiene que

$$\liminf a_n \leq \limsup a_n$$

y que, más aún, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge si y sólo si

$$\liminf a_n = \limsup a_n < \infty.$$

En esta sección del libro de Royden se prueban dos grandes resultados de convergencia (relacionados con la idea que teníamos desde el comienzo de intercambiar límites e integrales):

1. *Lema de Fatou*: Si $\{f_n : E \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas tal que f_n converge puntualmente a una función f c.t.p entonces

$$\int_E f \leq \liminf \int_E f_n$$

2. *Teorema de convergencia monótona - TCM*: Si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión puntualmente creciente de funciones medibles no negativas y $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ entonces se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int f.$$

Una primera observación es la siguiente:

Problema 1: En el lema de Fatou no necesariamente hay igualdad

Sol: Un ejemplo en el que no hay igualdad es el que se presenta a continuación. Sea $f_n : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$f_n(t) = n\chi_{(0, 1/n)}(t).$$

Tenemos que cada f_n es medible pues la función $\chi_{(0, 1/n)}$ es medible por ser la función característica de un conjunto medible. Ahora bien, por propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$ tenemos que f_n converge puntualmente a la función constante 0. Así

$$\int_{(0, 1]} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \int_{(0, 1]} 0 = 0,$$

mientras que por otro lado

$$\int_{(0, 1]} f_n = \int_{(0, 1]} n\chi_{(0, 1/n)} = n \cdot m\left(\left(0, \frac{1}{n}\right)\right) = 1.$$

Ejercicio: Encontrar un contraejemplo en el caso en que el dominio es $\mathbb{R}$

En el libro de Royden se prueba el TCM usando el lema de Fatou, sin embargo podemos ver que, de hecho, ambos resultados son equivalentes:

Problema 2: Probar el lema de Fatou asumiendo el teorema de convergencia monótona.

Sol: Probaremos que, de hecho, el teorema de convergencia monótona implica una versión más general del lema de Fatou:

Fatou generalizado: Si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas entonces se tiene que

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n.$$

Procedemos entonces a probar este resultado. Por definición de ínfimo se tiene que para cada $m \geq k$ se cumple que

$$\inf_{j \geq k} f_j \leq f_m.$$

Ahora, de acuerdo al teorema 3.20 sabemos que el ínfimo de una sucesión de funciones medibles es medible y por tanto, por monotonía de la integral vemos que

$$\int \inf_{j \geq k} f_j \leq \int f_m.$$

Se tiene entonces que el lado izquierdo de la desigualdad anterior es cota inferior del conjunto $\{\int f_m : m \geq k\}$ y por tanto (puesto que por definición el ínfimo es la mayor de las cotas inferiores de un conjunto) se concluye que

$$\int \inf_{j \geq k} f_j \leq \inf_{m \geq k} \int f_m.$$

Ahora bien, como mencionamos anteriormente, la sucesión $\{\inf_{j \geq k} f_j\}_{k \in \mathbb{N}}$ es monótona creciente y por tanto cumple las hipótesis del TCM. De esta forma tenemos que

$$\begin{aligned} \int \liminf f_n &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} f_k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \inf_{k \geq n} f_k \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \geq n} \int f_m \\ &= \liminf \int f_m, \end{aligned}$$

donde en la segunda línea se usó el TCM, en la tercera la desigualdad probada anteriormente y en la última la definición de $\liminf$.

Así concluimos que

$$\int \liminf f_n = \liminf \int f_m,$$

como se quería.

Problema 3: Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto medible y $\{f_n : E \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión puntualmente decreciente de funciones medibles no negativas tal que f_1 es **integrable** sobre E . Probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

Dar un ejemplo que muestre que la conclusión deja de ser cierta en general si se omite la hipótesis de que f_1 sea integrable.

Sol: Notar que como

$$f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \cdots 0$$

se tiene que

$$-f_1 \leq -f_2 \leq -f_3 \leq \cdots 0$$

y por tanto

$$0 \leq f_1 - f_2 \leq f_1 - f_3 \leq \cdots f_1.$$

De esta forma, $\{f_1 - f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión puntualmente creciente de funciones medibles no negativas y por tanto se cumplen las hipótesis del TCM. Ahora bien:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_1(t) - f_n(t)) = f_1(t) - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f_1(t) - f(t)$$

y por tanto tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E (f_1 - f_n) = \int_E (f_1 - f),$$

donde $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Si f_1 es integrable entonces por monotonía se tiene que f y cada f_n son integrables (*¿por qué?*). Así tenemos

$$\int_E f_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \int_E f_1 - \int_E f$$

y por tanto (usando el hecho de que $\int f_1 < \infty$) concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \int_E f,$$

como se quería.

Para el ejemplo, sea $f_n = \chi_{[n, \infty)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Tenemos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión como la del enunciado con la salvedad de que f_1 no es integrable (pues $m([1, \infty)) = \infty$). Se tiene que f_n converge puntualmente a cero, mientras que $\int f_n = \infty$ para todo n .

Comentario: Evidentemente, de manera análoga al resultado de «continuidad de la medida», para que la conclusión valga basta asegurar que $\int f_k < \infty$ para algún k suficientemente grande.

Veamos ahora un par de aplicaciones del Teorema de convergencia monótona

Problema 4: Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y no negativa. Pruebe que la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_{(-\infty, x)} f$$

es continua.

Sol: Probaremos que si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales tales que $\lim x_n = x$ entonces se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x).$$

Sea $y_n = \inf_{k \geq n} x_k$. Como ya hemos señalado, la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona decreciente. Sea $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$g_n(t) = f(t) \cdot \chi_{(-\infty, y_n)}.$$

Del hecho de que la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sea creciente se desprende que la sucesión $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es puntualmente creciente. Además, como f es medible y el conjunto $(-\infty, y_n)$ es medible (por ser un intervalo) se tiene que cada g_n es medible y, por tanto, por TCM concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_n = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n.$$

Ahora bien, el lado izquierdo de la igualdad anterior no es más que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(-\infty, y_n)} f = \lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n).$$

Así tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n.$$

Ahora bien, notemos (justifique) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) = f(t) \chi_{(-\infty, x)}(t) \quad \forall t.$$

De esta forma concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(y_n) = \int_{(-\infty, x)} f = F(x).$$

Esto es casi el resultado que se quiere pero aún no podemos concluir puesto que necesitamos el límite de $F(x_n)$, no de $F(y_n)$ y por el momento ni siquiera somos capaces de asegurar que la sucesión $\{F(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Notemos que, por definición, $y_n \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y por tanto como f es no negativa se sigue que $F(y_n) \leq F(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. De esta forma tenemos que

$$F(x) \leq \liminf F(x_n).$$

Ahora, sea $z_n = \sup_{k \geq n} x_k$ y $h_n = f \cdot \chi_{(-\infty, z_n)}$. Como ya comentamos, la sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente y por tanto $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión puntualmente decreciente de funciones medibles. Así, como

$$\int_{\mathbb{R}} h_1 = \int_{(-\infty, z_1)} f \leq \int_{\mathbb{R}} f < \infty$$

concluimos por el Problema 3 (de manera análoga a lo hecho para la sucesión $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = F(x).$$

Así como $x_n \leq z_n$ concluimos que

$$\limsup F(x_n) \leq F(x).$$

De esta forma tenemos que

$$F(x) \leq \liminf F(x_n) \leq \limsup F(x_n) \leq F(x)$$

y por tanto

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n),$$

como se quería.

Problema 5: Sea $f_n : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$f_n(t) = \frac{1 + nt^2}{(1 + t^2)^n}.$$

Calcule justificadamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0,1]} f_n.$$

Sol: Tenemos que cada f_n es medible (*¿por qué?*). Afirmamos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión puntualmente decreciente. Para probar esta afirmación notemos que

$$f_{n+1}(t) = \frac{1 + (n+1)t^2}{(1 + t^2)^{n+1}} \leq \frac{1 + (n+1)t^2 + t^4}{(1 + t^2)^{n+1}} = \frac{(1 + nt^2)(1 + t^2)}{(1 + t^2)^{n+1}} = f_n(t).$$

Ahora bien $f_1(t) = 1 \ \forall t \in (0, 1]$ y por tanto f_1 es integrable. Así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0,1]} f_n = \int_{(0,1]} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

Veamos entonces el límite puntual de la sucesión. Expandiendo el binomio $(1 + t^2)^n$ vemos que

$$f_n(t) \leq \frac{1 + nt^2}{1 + nt^2 + \frac{n(n-1)}{2}t^4} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

De esta forma concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_n = 0.$$

Ejercicio: Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx^8}{1+nx} dx$$