

Análisis Abstracto I
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile
Prof. Manuel Pinto J.
Ayt. Nelson Alvarado H.

Tarea 3

Fecha de entrega: 9 de Noviembre

I. Decida justificadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Si $E \subseteq \mathbb{R}$ es medible y $\{f_n : E \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles entonces el conjunto

$$E_0 = \{x \in E : \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}\}$$

es medible.

2. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función LB-medible y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función biyectiva tal que g^{-1} es de Lipschitz entonces $f \circ g$ es LB-medible.
3. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto medible con $m(E) < \infty$. Si $\{f_n : E \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles y $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ es una función medible con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \int_E f$$

entonces se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f| = 0$$

4. Si $\{f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones simples tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0$ para casi todo $t \in [0, 1]$ entonces la sucesión

$$\left\{ \int_{[0,1]} f_n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

es acotada.

5. Si $\{f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones LB-medibles tal que

$$\int_{[0,1]} f_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 1$ para casi todo $t \in [0, 1]$.

II. Enunciar y probar la extensión del Teorema de Lusin al caso en que el dominio es medible de medida infinita.

III.

1. Calcule **justificadamente**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{20 + nt^{n-1}}{(1+t)^n} dt$$

2. Sea $\gamma > 0$ y $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(t) = \frac{\gamma t}{1+t} + \frac{\text{sen}(t^2)}{t}.$$

Pruebe que para cada $a > 0$ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a f(nt) dt = a\gamma.$$