Octubre 2020
Análisis Abstracto I
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile
Prof. Manuel Pinto J.
Ayt. Nelson Alvarado H.

Ayudantía 6: La integral de Lebesgue

Desde los primeros cursos de cálculos tenemos la noción de que *la integral* de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es *el área* (eventualmente con signo) de la región del plano comprendida entre el eje x y el gráfico de f. Ahora bien, evidentemente lo anterior no constituye, en ningún caso, una definición formal y rigurosa de qué es concretamente la integral de una función. Más aún, como bien sabemos, en matemáticas no toda función responde directamente a nuestra intuición geométrica y, en ese contexto, nuevamente no es claro cómo podríamos (si acaso pudiéramos) determinar la integral de una función «lo suficientemente extraña». En pos de dar rigurosidad a esta idea es que históricamente se han ido definiendo distintas «formas de integrar». Una definición bastante exitosa que estudiamos en primer año es la famosa «integral de Riemann», que da una formulación suficientemente rigurosa que permite determinar de forma satisfactoria un gran número de integrales (por ejemplo, la de cualquier función continua). Sin embargo, al adentrarnos en el estudio del Análisis Real y sus complejidades podemos ver que la integral de Riemann tiene ciertas limitaciones:

1. Riemann permite integrar «pocas funciones»: un ejemplo clásico de una función que no es Riemann-integrable es la función $\chi_{\mathbb{Q}} : [0, 1] \to \mathbb{R}$. En efecto: si $P = \{[a_k, a_{k+1}]\}_{k=0}^{r}$ es cualquier partición del intervalo $[0, 1]$ entonces se tiene que la suma inferior de Riemann asociada a dicha partición es

$$L(f, P) = \sum_{k=0}^{r} (a_{k+1} - a_k) \cdot \min\{\chi_{\mathbb{Q}}(t) : t \in [a_k, a_{k+1}]\} = \sum_{k=0}^{r} (a_{k+1} - a_k) \cdot 0 = 0$$

puesto que todo intervalo contiene elementos irracionales; mientras que

$$U(f, P) = \sum_{k=0}^{r} (a_{k+1} - a_k) \cdot \max\{\chi_{\mathbb{Q}}(t) : t \in [a_k, a_{k+1}]\} = \sum_{k=0}^{r} (a_{k+1} - a_k) \cdot 1 = 1,$$

puesto que todo intervalo contiene también elementos racionales. Más aun, veremos que una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es Riemann-integrable si y sólo si el conjunto de discontinuidades tiene medida cero.

2. Riemann impone muchas restricciones como para intercambiar límites con integrales: en distintas situaciones en análisis se requiere que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n. \tag{1}$$

Un ejemplo muy importante de esto [1] es el caso en que $f_n = \sum_{k=1}^{n} g_k$, situación en la cual lo que se quiere es que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int g_k = \int \sum_{k=1}^{\infty} g_k. \tag{2}$$

Usualmente los resultados que permiten intercambiar una integral (de Riemann) con límites son del estilo «podemos hacer el intercambio si el límite es también (Riemann) integrable», lo cual impone fuertes restricciones a la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (por ejemplo, sabemos que si f_n converge **uniformemente** entonces podemos hacer el intercambio que se quiere). En ese sentido, tener una «mejor integral», en la que intercambios como los mencionados sean permitidos, se vuelve deseable.

Para precisar un poco lo dicho en el párrafo anterior, volvamos al ejemplo de las series (que, como señalamos, es un ejemplo particularmente importante). Sea entonces $\{g_k : [a,b] \to \mathbb{R}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones y supongamos que cada g_k es **no negativa**. Definimos $f_n = \sum_{k=1}^{n} g_k$. Como las funciones g_k son no negativas tenemos que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona. En ese sentido, recordando que queremos tener una igualdad como la de (2) (que no es más que un caso particular de (1)), un resultado que se quisiera tener es el siguiente:

(Convergencia monótona) Si $\{f_n : [a,b] \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión ***puntualmente*** *creciente de funciones integrables y* ***acotadas*** *entonces la igualdad (1) se satisface*

Lamentablemente, en el contexto de la integral de Riemann este resultado no se cumple en toda generalidad. Para ilustrar esto, sea $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ y $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = r_k \text{ para algún } k \leq n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Tenemos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión puntualmente creciente de funciones acotadas y Riemann integrables, sin embargo se tiene que f_n converge puntualmente a la función $\chi_{\mathbb{Q}}$ que, como ya vimos, no es Riemann integrable.

3. Riemann sólo permite integrar sobre dominios bastante restringidos. Una integral del estilo $\int_a^{\infty} f(t)dt$ no tiene sentido, propiamente hablando, como una integral de Riemann: necesariamente una integral de esta forma debe verse como un límite del estilo

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^N f(t)dt.$$

[1] Esto es recurrente en el estudio de Series de Fourier y probabilidades. De hecho, se dice que esto es una de las principales motivaciones para querer definir una «mejor integral»

Ahora bien, el caso $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ es aún más complicado puesto que, si bien es natural interpretar esta integral como un límite de las integrales sobre intervalos simétricos, perfectamente podría interpretarse también como un límite sobre intervalos asimétricos (en que los extremos no divergen a la misma «rapidez»).

4. La definición de la integral de Riemann está intrínsecamente ligada al hecho de que $\mathbb{R}$ es ordenado (estructura que es esencial para definir una «partición por intervalos») lo cual impide que esta teoría pueda ser extendida naturalmente a espacios no euclidianos.

Veremos que, usando el lenguaje de teoría de la medida, seremos capaces de definir una nueva integral, un poco más sofisticada, que permitirá mejorar considerablemente las problemáticas que planteamos en las páginas anteriores:

1. Podremos integrar más funciones. Por ejemplo, podremos integrar cualquier función medible y acotada
2. Tendremos resultados que permitirán intercambiar límites e integrales como, por ejemplo, un teorema de convergencia monótona. Dedicaremos buena parte de nuestro estudio de la integral de Lebesgue a probar teoremas de este estilo.
3. La definición de la integral de Lebesgue será menos restrictiva en cuanto a los dominios de las funciones que podremos integrar. Sólo requeriremos que el dominio sea medible, en particular no será necesario hablar de integrales *impropias* para referirnos a integrales de funciones cuyo dominio sea un intervalo infinito.
4. La definición pasará fundamentalmente por el uso del lenguaje de medida que hemos estado trabajando. En ese contexto, la definición de esta integral será extendible a espacios más abstractos que cuenten con una *medida*, situación que es fundamental, por ejemplo, en teoría de probabilidad.

Habiendo evidenciado ciertas limitaciones de la integral de Riemann, cabe preguntarse ¿cómo es que esta nueva integral mejorará la situación?

Consideremos primero una función sencilla: sea

$$f : [0, 3] \to \mathbb{R} : t \to \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } t \in (0, 2] \\ 2 & \text{si } t \in (2, 3] \end{cases} .$$

Bajo la perspectiva de la integral de Riemann lo que hacemos es particionar el intervalo $[0, 3]$ (es decir, el **dominio** de f) de manera de encontrar aproximaciones inferiores y superiores que sean arbitrariamente buenas. Ahora bien, si pensamos que la integral es «simplemente» el área de una cierta región, entonces este valor no debiese cambiar si rotáramos el gráfico y lo viésemos de costado. En efecto: de tal forma podemos ver que

$$\begin{aligned}\int_0^3 f(t)dt &= 0 \cdot \text{largo}(f^{-1}(\{0\})) + 1 \cdot \text{largo}(f^{-1}(\{1\})) + 2 \cdot \text{largo}(f^{-1}(\{2\})) \\ &= 0 \cdot \text{largo}([0,1]) + 1 \cdot \text{largo}((1,2]) + 2 \cdot \text{largo}((2,3]) \\ &= 0 + 1 + 2 = 3.\end{aligned}$$

Sin embargo, ya vimos que hay funciones, de formulación tan sencilla como la anterior, que no podemos integrar en el sentido de Riemann: la función $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,3]} : [0,3] \to \mathbb{R}$, es un ejemplo de ello. En este caso, lo que falla es que no somos capaces de particionar el **dominio** de manera de encontrar aproximaciones suficientemente buenas de la función. Por otro lado, la **imagen** de $\chi_{\mathbb{Q}}$ es extremadamente sencilla: consta de sólo dos puntos y, de esta forma, siguiendo la idea que usamos para f parecería natural pensar que

$$\int \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,3]} = 0 \cdot \text{«largo»}((\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0,3])) + 1 \cdot \text{«largo»}(\mathbb{Q} \cap [0,3]),$$

lo cual, antes de todo lo que hemos estudiado en este curso, parecería no tener sentido. Sin embargo, como ya contamos con el concepto de medida, podemos darle un significado concreto al «largo» de conjuntos como $\mathbb{Q}$ o $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0,3]$. De esta forma, llegamos naturalmente a que

$$\int \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,3]} = 0 \cdot m((\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0,3])) + 1 \cdot m(\mathbb{Q} \cap [0,3]) = 0.$$

Por supuesto, lo que hicimos en el último párrafo no tiene sentido en el contexto de la integral de Riemann, pero nos da una idea de cómo podríamos definir la integral de Lebesgue de una función simple (es decir, de una función medible que toma una cantidad finita de valores). Definimos entonces la integral de una función simple $\varphi = \sum_{k=1}^r a_k \chi_{E_k}$ como

$$\int \varphi = \sum_{k=1}^r a_k m(E_k).$$

Ahora bien, notemos que en el caso particular en que φ es escalonada (es decir, combinación lineal de funciones características de intervalos $[b_k, c_k]$) entonces

$$\int \varphi = \sum_{k=1}^r a_k (c_k - b_k),$$

de donde vemos que con esta noción recuperamos las nociones con las que se define la integral de Riemann. Más aún, esto nos da la idea de que la buena forma de definir la integral de Lebesgue de una función medible y acotada pasa por aproximar la función por funciones simples, de la misma manera en que procedimos en la ayt. 4. Es así como en la sección 4.2 del libro de Royden se define la integral de una función $f : E \to \mathbb{R}$ medible y acotada como

$$\int_E f := \inf \left\{ \int \psi : \psi \ \text{ fc. simple con } \ \psi \geq f \right\}$$

y en virtud de la proposición 4.3 de dicha sección la definición también podría darse como el supremo de las integrales de las funciones simples φ con $\varphi \leq f$.

Ahora bien, esta integral, como se muestra en la sección 4.2 del libro de Royden, tiene buenas propiedades que esperamos: por ejemplo, es lineal y monótona (ver prop. 4.5).

Un primer resultado de interés (con miras a satisfacer (1)) es el siguiente:

Teorema de convergencia acotada - TCA - prop. 4.6: Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto medible con $m(E) < \infty$ y $\{f_n : E \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles tales que existe $M > 0$ con $|f_n(t)| \leq M$ $\forall t \in E$ y $\forall n \in \mathbb{N}$. Se tiene que si $f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

En la reunión del miércoles comentaremos la demostración de este teorema, el cual será de utilidad para probar el teorema de convergencia monótona. En lo que sigue, veremos un ejemplo de aplicación de este resultado:

Problema 3: Sea $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Definimos $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vía

$$\psi(x) = \int_{[0,1]} \frac{h(t)}{1 + x^2 t} dt.$$

a) Calcular $\lim_{n\to\infty} \psi\left(\frac{1}{n}\right)$

b) Probar que ψ es continua.

Sol: Una buena forma de atacar este tipo de problemas es construir una sucesión conveniente de funciones.

a) Sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f_n(t) = \frac{h(t)}{1 + \frac{t}{n^2}}.$$

Como la función $u_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$t \to \frac{1}{1 + \frac{t}{n^2}}$$

es continua se tiene que es en particular medible. De esta forma tenemos que f_n es medible al ser producto de dos medibles (recordar que por hipótesis se tiene que h es medible). Ahora, como h es además acotada existe $M > 0$ tal que $|h(t)| \leq M$ para todo $t \in [0,1]$. Así, como $|u_n(t)| \leq 1$ para todo $t \in [0,1]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$|f_n(t)| \leq M \;\; \forall t \in [0,1] \;\text{ y }\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es decir, tenemos que la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada.

Por otro lado, notemos que puntualmente se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = h(t).$$

De esta forma por TCA tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n = \int_{[0,1]} h(t).$$

Es decir, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \psi\left(\frac{1}{n}\right) = \int_{[0,1]} h(t).$$

b) Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Para probar que ψ es continua probaremos que

$$\lim_{n\to\infty} \psi(x_n) = \psi(x)$$

de manera similar a lo que hicimos en la parte a) (que no es más que un caso particular de lo que haremos ahora).

Sea $g_{n,x} : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$g_n(t) = \frac{h(t)}{1 + x_n^2 t}.$$

Análogamente a lo hecho en a) vemos que se tiene que la sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada. Consideremos además, para cada $t \in [0,1]$ la función

$$g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \frac{h(t)}{1 + x^2 t}.$$

Tenemos que cada g_t es continua (recordar que t es arbitrario pero está fijo) y por tanto se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} g_t(x_n) = g_t(x) = \frac{h(t)}{1 + x^2 t}.$$

Ahora bien, notemos que para todo $t \in [0,1]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $g_t(x_n) = g_n(t)$ y por tanto la igualdad anterior se traduce en que

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t) = \frac{h(t)}{1 + x^2 t}.$$

De esta forma (recordando que $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada) tenemos, por el TCA que

$$\int_{[0,1]} \frac{h(t)}{1 + x^2 t} = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} g_n(t).$$

Finalmente, notemos que el lado izquierdo de esta ecuación es precisamente $\psi(x)$ mientras que el lado derecho es $\lim_{n\to\infty} \psi(x_n)$. Concluimos entonces que

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \psi(x_n),$$

como se quería.