Octubre 2020
Análisis Abstracto I
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile
Prof. Manuel Pinto J.
Ayt. Nelson Alvarado H.

Ayudantía Semana 5:
Principios de Littlewood

Los principios de Littlewood son resultados que relacionan los nuevos conceptos que hemos introducido en este curso (medida, conjuntos y funciones medibles) con conceptos que conocemos de nuestra formación matemática previa (intervalos, funciones continuas). En su momento caracterizamos cómo son los subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$ y vimos que son «casi boreleanos» y, más aún, en el caso de medida finita, son «casi una unión de intervalos». En esta ayudantía probaremos dos grandes resultados que, informalmente, dicen lo siguiente:

- Teorema de Egoroff: En un conjunto medible de medida finita la convergencia puntual es «casi uniforme»
- Teorema de Lusin: Una función medible es «casi continua»

Teorema de Egoroff: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto medible con $m(A) < \infty$.

Sea $\{f_n : A \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles y $f : A \to \mathbb{R}$ una función medible. Se tiene que si f_n converge puntualmente a f c.t.p entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto medible $B \subseteq A$ tal que $m(B) < \varepsilon$ y f_n converge **uniformemente** a f en $A - B$.

Demostración:

Sea

$$E_{\eta,N} = \bigcup_{n\geq N} \{x \in A : |f_n(x) - f(x)| \geq \eta\}$$

(esto debe pensarse como una forma de describir la «falla en la convergencia puntual»). Notemos que para un $\eta > 0$ fijo se tiene que

$$E_{\eta,N} \supset E_{\eta,N+1} \supset E_{\eta,N+2} \cdots$$

(pues $E_{\eta,N+1}$ se construye uniendo un conjunto menos que $E_{\eta,N}$). Ahora bien, como $E_{\eta,N} \subseteq A$ y $m(A) < \infty$ se concluye, por continuidad de la medida, que

$$m\left(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} E_{\eta,N}\right) = \lim_{N\to\infty} m\left(E_{\eta,N}\right). \tag{1}$$

Afirmamos que

$$m\left(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} E_{\eta,N}\right) = 0.$$

Para probar esta afirmación notemos que si $x \in \bigcap_{N\in\mathbb{N}} E_{\eta,N}$ entonces, por definición de $E_{\eta,N}$, se tiene que para cada $N \in \mathbb{N}$ existe $N' \geq N$ tal que $|f_{N'}(x) - f(x)| \geq \eta$. Así, de la definición de convergencia se concluye que $f_n(x)$ **no** puede converger a $f(x)$ y, por tanto,

$$\bigcap_{N\in\mathbb{N}} E_{\eta,N} \subseteq \{x \in A : f_n(x) \text{ no converge a } f(x)\}$$

y este último conjunto tiene medida nula por hipótesis. De esta forma, por monotonía de la medida, concluimos que

$$m\left(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} E_{\eta,N}\right) = 0. \tag{2}$$

Así de (1) y (2) concluimos que para todo $\nu > 0$ existe $N_\nu \in \mathbb{N}$ tal que

$$m\left(E_{\eta,N}\right) < \nu \quad \forall N \geq N_\nu.$$

En particular, si tomamos $\eta_k = 1/k$ y $\nu_k = 2^{-k}\varepsilon$ (recuerde que ε está fijo desde el comienzo) vemos que para cada k existe $N_k \in \mathbb{N}$ minimal tal que

$$m\left(E_{\eta_k,N}\right) < \frac{\varepsilon}{2^k} \quad \forall N \geq N_k.$$

Sea $B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_{\eta_k,N_k}$. Tenemos que

$$m(B) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} m\left(E_{\eta_k,N_k}\right) < \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Afirmamos que f_n converge uniformemente a f en $A - B$. Para probar esta afirmación, sea $\upsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $\eta_k < \upsilon$. Si $x \in A - B$ entonces en particular $x \notin E_{\eta_k,N_k}$ y por tanto para todo $n \geq N_k$ se tiene que

$$|f_n(x) - f(x)| < \eta_k < \upsilon.$$

Como υ es arbitrario concluimos que f_n converge uniformemente a f en $A - B$, como se quería.

■

ejercicio 1: El resultado puede fortalecerse: el conjunto B puede escogerse de manera que $A - B$ sea compacto.

Una primera observación importante es que la hipótesis de que $m(A) < \infty$ **no** es desechable. Por ejemplo, sea $A = \mathbb{R}$ y $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función característica del intervalo $[n, n+1]$. Tenemos que f_n converge puntualmente a la función cero en todo $\mathbb{R}$. Afirmamos que no existe un subconjunto B de $\mathbb{R}$ con $m(B) < \infty$ tal que f_n converja **uniformemente** en $\mathbb{R} - B$ (en particular en este caso no existe $\varepsilon > 0$ tal que la consecuencia del teorema valga). Sea B un subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que f_n converge uniformemente a f en $\mathbb{R} - B$. En tal caso, como f_n existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x)| < 1 \quad \forall n \geq N \text{ y } \forall x \in \mathbb{R} - B$$

y, por tanto (dado que f_n sólo toma los valores 0 y 1), tenemos que $x \notin [n, n+1]$ $\forall n \geq N$ o, en otras palabras, tendríamos que $\mathbb{R} - B \subseteq (-\infty, N)$. De esta manera $[N, \infty) \subseteq B$ y por tanto

$$m(B) \geq m([N, \infty)) = \infty.$$

Teorema de Lusin: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función medible. Se tiene que dado $\delta > 0$ existe una función **continua** $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$m\left(\{x \in [a, b] : f(x) \neq \varphi(x)\}\right) < \delta.$$

Observación: Esto **no** significa que f sea continua en todos los puntos fuera de este conjunto de medida pequeña: por ejemplo, la función

$$\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} : [0, 1] \to \mathbb{R}$$

es medible (pues $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ es un conjunto medible) y discontinua en **todo** punto pero es igual c.t.p a la función constante 0.

Para probar este teorema probaremos un par de lemas técnicos que nos serán de utilidad.

Lema 1: Si $E \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto medible con $m(E) < \infty$ entonces existen intervalos $I_1, ..., I_r$ tales que $m(E\Delta C) < \varepsilon$, donde $C = \bigcup I_i$ y $E\Delta C = (E - C) \cup (C - E)$ *(la diferencia simétrica de E y C)*

Demostración: De la definición de medida **exterior** de Lebesgue tenemos que existe una colección de intervalos $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $E \subseteq \cup I_k$ y

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) < m(E) + \frac{\varepsilon}{2} < \infty.$$

De esta forma, como la serie converge se tiene que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} m\left(I_k\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideremos $r = k_0 - 1$, en cuyo caso $C = \bigcup_{i=1}^{k_0-1} I_i$ y se tiene que

$$E - C \subseteq \bigcup_{k=k_0}^{\infty} I_k$$

y por tanto, por monotonía y subaditividad de m deducimos que

$$m(E-C) \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} m(I_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado

$$C - E \subseteq \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k \right) - E$$

y, por tanto,

$$m(C-E) \leq m\left(\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k \right) - E \right) = m\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k \right) \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} m(I_k) \right) - m(E) < \frac{\varepsilon}{2},$$

donde en la igualdad central se usa el hecho de que E es medible con $m(E) < \infty$. Así tenemos que

$$m(E\Delta C) = m(E-C) + m(C-E) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

donde en la primera igualdad se usa el hecho de que $E-C$ y $C-E$ son disjuntos y medibles.

$\square$

Recordemos que una función medible se dice simple si toma sólo una cantidad finita de valores. Una función simple se dice escalonada si es una combinación lineal finita de funciones características de intervalos (i.e si es de la forma $\sum_{k=1}^{r} a_k \chi_{I_k}$ donde cada I_k es un intervalo).

Lema 2: Sea $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función simple. Se tiene que dado $\varepsilon > 0$ existe una función escalonada $\psi_\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$m\left(\{x \in \mathbb{R} : \phi(x) \neq \psi_\varepsilon(x)\}\right) < \varepsilon.$$

Demostración: Tenemos que

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{r} a_k \chi_{E_k}$$

para ciertos conjuntos medibles E_k, donde, podemos suponer $E_k \cap E_j = \emptyset$ si $k \neq j$ (¿por qué?). Como cada $E_k \subseteq [a,b]$ se tiene que $m(E_k) < \infty$ y por tanto por el lema 1 existe un conjunto C_k que es una unión finita de intervalos que satisface que

$$m\left(E_k \Delta C_k\right) < \frac{\varepsilon}{r}.$$

Definamos la función $\psi_\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ vía

$$\psi_\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{r} a_k \chi_{C_k},$$

la cual es escalonada (¿por qué?). Tenemos además que $\psi_\varepsilon(x) = \phi(x)$ excepto si

$$x \in \bigcup_{k=1}^{r} (E_k \Delta C_k)$$

y tenemos que

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{r} (E_k \Delta C_k)\right) \leq \sum_{k=1}^{r} m\left(E_k \Delta C_k\right) < r \cdot \frac{\varepsilon}{r} = \varepsilon.$$

□

Lema 3: Dada una función medible $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ existe una sucesión de funciones escalonadas $\{\psi_n : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = f(x) \text{ para casi todo } x \in [a,b]$$

(es decir, la sucesión $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente c.t.p a f)

Comentario: Note que este resultado es más fuerte que el que probamos en la ayt. 4. En este lema ya no aproximamos por funciones simples arbitrarias, si no por un tipo especial de ellas.

Demostración: Por los problemas 3 y 5 de la ayt.4 (lema de aproximación por funciones simples) existe una sucesión $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples tales que $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f. Ahora, por el lema 2 recién probado, para cada n existe una función escalonada $\psi_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\phi_n = \psi_n$ salvo en un conjunto E_n con $m(E_n) < 2^{-n}$. Sea

$$E = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq N} E_n.$$

Por monotonía tenemos, para cada $N \in \mathbb{N}$ que

$$m(E) \leq m\left(\bigcup_{n\geq N} E_n\right) \leq \sum_{n=N}^{\infty} m(E_n) < \sum_{n=N}^{\infty} 2^{-n}.$$

Ahora, como este último término es arbitrariamente pequeño si N es suficientemente grande (pues la serie $\sum 2^{-n}$ converge) se concluye que $m(E) = 0$. Afirmamos que $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f fuera de E. Si $x \notin E$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin E_n \ \forall n \geq N$ o, equivalentemente, $\phi_n(x) = \psi_n(x) \ \forall n \geq N$. Así, como ϕ_n converge puntualmente a f concluimos que $\psi_n(x) \to f(x)$, como se quería.

□

Finalmente, un lema «topológico» que necesitaremos:

Lema 4:

1. Si O es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ entonces O es unión numerable de intervalos abiertos disjuntos.

2. Sea G un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ y $f : G \to \mathbb{R}$ una función continua. Se tiene que existe una función continua $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que extiende a f (es decir tal que $F(x) = f(x)\ \forall x \in G$.

Demostración:

1. Como O es abierto para cada $x \in O$ existe un intervalo I_x con $x \in I_x \subseteq O$. Más aún, podemos encontrar un I_x maximal en el sentido siguiente: para todo intervalo J con $x \in I_x \subsetneq J$ necesariamente se tiene que $J \cap O^c \neq \emptyset$. Por construcción tenemos que $O = \bigcup_{x \in O} I_x$. Ahora bien, la maximilidad de I_x y el hecho de que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ se tiene que $I_x = I_q$ para algún $q \in \mathbb{Q}$. Así, como $\mathbb{Q}$ es numerable concluimos que O es unión numerable de intervalos. Resta ver que estos intervalos son disjuntos: sean $x, y \in O$ con $I_x \neq I_y$. Si $I_x \cap I_y \neq \emptyset$ entonces $I_x \cup I_y$ es un intervalo estrictamente más grande que I_x que contiene a x, contradiciéndose la maximalidad de I_x.

2. Definimos F en G simplemente como f. Resta ver cómo definir F en $\mathbb{R} - G$. Para ello notemos que como G es cerrado se tiene que $\mathbb{R} - G$ es abierto y, por tanto, por la parte anterior podemos escrbir
$$\mathbb{R} - G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n).$$
De esta forma, basta definir F en cada intervalo (a_n, b_n) de manera que la función resultante sea continua. Para ello notemos que cada $a_n, b_n \in G$ y por tanto sabemos el valor de $F(a_n)$ y $F(b_n)$ para cada n. Definimos F en (a_n, b_n) como la única función lineal-afín que satisface $F(a_n) = f(a_n)$ y $F(b_n) = f(b_n)$.

$\square$

Demostración del teorema de Lusin: De acuerdo al lema 3 existe una sucesión de funciones escalonadas $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge puntualmente a f salvo en un conjunto E de medida cero.

Sea entonces $\varepsilon > 0$. Como $m([a, b]) < \infty$ tenemos, de acuerdo al teorema de Egorov, que existe un conjunto cerrado $D \subseteq [a, b]$ tal que $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f fuera de D y $m(D) < \varepsilon/2$. Ahora bien, como ψ_n es escalonada, ψ_n es discontinua sólo en una cantidad finita de puntos (los extremos de los intervalos que estén involucrados en la definición de ψ_n.). Sea F_n el conjunto de estos puntos y $F = \bigcup F_n$. Tenemos que cada F es numerable (por ser unión numerable de conjuntos finitos) y por tanto $m(F) = 0$. Sea $E = F \cup D$. Por lo dicho anteriormente se tiene que
$$m(E) = m(D) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Ahora, como E es medible existe un abierto O con $E \subseteq O$ y $m(O - E) < \varepsilon/2$. Como cada ψ_n es continua fuera de F (por definición de F) se tiene que cada ψ_n es continua fuera de O. Ahora bien, por definición de D se tiene que $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f fuera de D y por tanto $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f fuera de O. Así, como

límite uniforme de funciones continuas es continua tenemos que $f|_{[a,b]-O} : [a,b] - O \to \mathbb{R}$ es continua.

Finalmente, como O es abierto tenemos que $[a,b] - O$ es cerrado y, por tanto, por lema 4 existe una función continua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que extiende a $f|_{[a,b]-O}$. La restricción de g a $[a,b]$ nos da una función continua con las propiedades deseadas.

$\blacksquare$

Se deja planteada la siguiente pregunta: ¿Podemos extender el teorema de Lusin a conjuntos medibles de medida infinita?