Análisis Abstracto I
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile
Prof. Manuel Pinto J.
Ayt. Nelson Alvarado H.

Tarea 2

Fecha de entrega: 26 de Octubre

I.

a) Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$. Muestre con un ejemplo que el conjunto $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ no es necesariamente cerrado

b) Pruebe que si A y B son subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ entonces $A + B$ es medible

c) Dé un ejemplo de conjuntos medibles A, B con $m(A) = m(B) = 0$ tales que $m^*(A + B) > 0$

d) Dé un ejemplo de un subconjunto abierto O de $\mathbb{R}$ tal que $m(\partial O) > 0$, donde $\partial O = \text{cls}(O) - \text{int}(O)$

Ayuda: Tenga en mente el conjunto de Cantor y su generalización

II. Decida justificadamente si las siguientes aserciones son verdaderas o falsas:

1. Toda función que toma una cantidad finita de valores es LB-medible
2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es LB-medible entonces $f^{-1}(A)$ es medible si A lo es.
3. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es LB-medible entonces $f(A)$ es medible si A lo es
4. Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son LB-medibles entonces $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > g(x)\}$ es medible
5. Composición de funciones LB-medibles es LB-medible

III.

a) Sea $\{f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones LB-medibles. Pruebe que si para casi todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ entonces f es LB-medible.

b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable ¿es f' LB-medible?

IV. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice Borel-medible si $f^{-1}(B)$ es un boreleano para todo boreleano B. Pruebe que dada una función LB-medible $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe una función Borel-medible tal que $f = g$ c.t.p.

Ayuda: Recuerde (problema 3 tarea 1) que todo subconjunto medible de $\mathbb{R}$ es unión de un boreleano y un conjunto de medida cero. Pruebe primero para funciones simples.