Septiembre 2020
Análisis Abstracto I
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile
Prof. Manuel Pinto J.
Ayt. Nelson Alvarado H.

Ayudantía Semana 3: La escalera del diablo

Nelson R. Alvarado H.

En esta ayudantía trabajaremos una construcción clásica en análisis que, en nuestro caso, servirá para probar tres hechos importantes y para nada evidentes:

1. No todo subconjunto medible de $\mathbb{R}$ es un boreleano
2. La imagen de un conjunto medible vía una función continua no es necesariamente un conjunto medible
3. La preimagen de un conjunto medible vía una función continua no es necesariamente medible

Para probar esto recurriremos a un conjunto que introdujimos en la ayudantía anterior: el conjunto de Cantor (el cual, como ya señalamos, es una fuente recurrente de contraejemplos en análisis).

Antes de empezar, probaremos lo siguiente:

Todo conjunto de medida positiva contiene un subconjunto no medible

Problema 1: El objetivo de este problema es probar el siguiente resulado debido a Steinhaus: *Sea A un subconjunto medible de $\mathbb{R}$ con $m(A) > 0$. Se tiene que el conjunto*

$$D_A := \{x - y : x, y \in A\}$$

contiene una vecindad abierta de 0.

a) Sea F un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y U un abierto tal que $F \subseteq U$. Probar que existe un una vecindad abierta V de 0 tal que el conjunto

$$V + F := \{v + x : v \in V, x \in F\}$$

está contenido en U.

b) Usar el lema anterior para probar el teorema de Steinhaus

Sol:

a) Como U es abierto se tiene que para cada $x \in F \subseteq U$ existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $W_x := (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subseteq U$. Ahora, sea $V_x := \left(-\frac{\varepsilon_x}{2}, \frac{\varepsilon_x}{2}\right)$. Se tiene que $\{x + V_x\}_{x \in X}$ es un cubrimiento abierto de F (Â¿por qué?) y, por tanto, como F es compacto, existen $x_1, ..., x_n \in F$ tales que

$$F \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} (x_k + V_{x_k}) = \bigcup_{k=1}^{n} \left(x_k - \frac{\varepsilon_{x_k}}{2}, x_k + \frac{\varepsilon_{x_k}}{2}\right).$$

Sea $V := \bigcap_{k=1}^{n} V_{x_k}$. Evidentemente $0 \in V$ y como V es intersección **finita** de abiertos, se tiene que V es abierto. Afirmamos que $V + F \subseteq U$. Para probar esto notemos que si $x \in F$ entonces existe $k \in \{1, ..., n\}$ tal que $x \in x_k + V_{x_k}$. Por otro lado, como $v \in V$ se tiene que $|v| \leq \varepsilon_{x_j}/2$ para todo j. Por lo tanto se tiene que

$$|x + v - x_k| \leq |x - x_k| + |v| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

y, por tanto, $x + v \in W_x \subseteq U$, como se quería.

b) Del problema 3 de la ayt-2 sabemos que si A es medible entonces existe un compacto K contenido en A y, más aún, si $m(A) > 0$ entonces podemos tomar K tal que $m(K) > 0$. De esta forma, para probar el teorema basta restringirnos al caso en que A es compacto. En lo que sigue supondremos entonces que A es compacto. Como A es compacto, A es en particular acotado y por tanto $m(A) < \infty$. Como $m(A) > 0$ se tiene que existe un abierto U con $A \subseteq U$ tal que

$$m(U) < 2m(A) \tag{1}$$

(Â¿por qué?). Ahora, como A es compacto, la parte a) de este problema nos dice que existe una vecindad abierta V de 0 tal que $A + V \subseteq U$. Afirmamos que $V \subseteq D$. Debemos verificar que dado $v \in V$ existen $x, y \in A$ tales que $v = x - y$ o, equivalentemente, que para todo $v \in V$ se tiene que $(v + A) \cap A \neq \emptyset$. Supongamos entonces que existe $v \in V$ tal que $(v + A) \cap A = \emptyset$. Como $v + A \subseteq U$ y $A \subseteq U$ se tiene

$$(v + A) \cup A \subseteq U$$

y, por tanto:

$$m(U) \geq m\left((v + A) \cup A\right).$$

Ahora, de la suposición $(v + A) \cap A = \emptyset$ (y el hecho de que tanto A como $v + A$ son medibles) se sigue que $m\left((v + A) \cup A\right) = m(v + A) + m(A)$ y, por tanto, por invarianza de m bajo traslaciones concluimos que $m(u) \geq 2m(A)$, lo cual contradice la desigualdad (1). Concluimos entonces que $(v + A) \cap A \neq \emptyset$ para todo $v \in V$, como se quería.

Problema 2: *Teorema de Vitali* Usar el Teorema de Steinhaus para probar que si A es un subconjunto medible de $\mathbb{R}$ con $m(A) > 0$ entonces A contiene un conjunto no medible.

Sol: Para construir un subconjunto no medible de A procederemos de manera similar a lo mostrado en la ayt-1 (introductoria). Decimos que dos números reales $x, y \in \mathbb{R}$ son $\mathbb{Q}$-equivalentes si $x - y \in \mathbb{Q}$. Esto define una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$. Por **axioma de elección** podemos construir un conjunto V tal que V contenga exactamente un elemento de cada clase de equivalencia. Tenemos que la recta real es la unión de los conjuntos $V + q$, $q \in \mathbb{Q}$.

Ahora, sea $A_q = A \cap (V + q)$. Afirmamos que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que A_q no es medible. Del hecho de que $A_q \subseteq (V + q)$ tenemos que

$$D_{A_q} \subseteq D_{V+q} = D_V.$$

Ahora, por definición de V se tiene que $D_V \cap (\mathbb{Q} - \{0\}) = \emptyset$ y, por tanto, el conjunto D_{A_q} no contiene ninguna bola abierta en torno a 0. De esta forma, por el Teorema de Steinhaus (problema 1 de esta ayt), concluimos que si A_q fuese medible para todo q entonces necesariamente se tendría que cada A_q sería de medida nula. Ahora bien, como $A = \bigcup A_q$ tendríamos que

$$m(A) = m\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q\right) \leq \sum m(A_q) = 0,$$

contradiciéndose el hecho de que $m(A) > 0$. De esta forma concluimos que existe $q_0 \in \mathbb{Q}$ tal que A_{q_0} no es medible. Así A_{q_0} es un subconjunto no medible de A.

Procederemos entonces a definir **La escalera del diablo**, una construcción clásica del análisis que nos permitirá afirmar las aserciones que planteamos al inicio de este documento. En lo que sigue, C denota al conjunto de Cantor (definido en la ayt. anterior) y C_k el conjunto obtenido tras el paso k de remoción de intervalos en la construcción de C.

Sea $O_k := [0, 1] - C_k$. Notemos que, de la definición de C_k, tenemos que O_k es la unión de $2^k - 1$ intervalos. Por ejemplo, $O_1 = (1/3, 2/3)$,

$$O_2 = (1/9, 2/9) \cup (1/3, 2/3) \cup (7/9, 8/9)$$

y

$$O_3 = (1/27, 2/27) \cup (1/9, 2/9) \cup (7/27, 8/27) \cup (1/3, 2/3) \cup (19/27, 20/27) \cup (7/9, 8/9) \cup (25/27, 26/27).$$

Definimos $O := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} O_k$. Tenemos que $O = [0, 1] - C$.

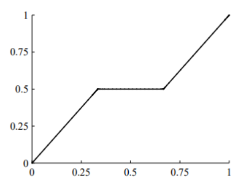
Definimos $\varphi_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

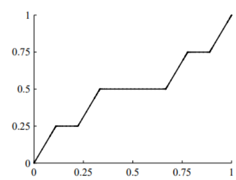
1. Ordenamos los intervalos que componen O_k de izquierda a derecha, tal como se hizo en el párrafo anterior para describir O_2 y O_3

2. Imponemos que φ_k sea constante en cada uno de los intervalos, de manera que si $O_k = I_k^{(1)} \cup I_k^{(2)} \cup \cdots \cup I_k^{(2^k-1)}$ entonces

$$\varphi_k(x) = \frac{j}{2^k} \text{ para } x \in I_k^{(j)}.$$

3. Definimos φ_k como la única función continua $\varphi_k : [0,1] \to [0,1]$ que es lineal en cada intervalo que compone a C_k, que extiende a la construcción dada en el paso 2 y que satisface $\varphi_k(0) = 0$ y $\varphi_k(1) = 1$. En la figura se muestran φ_1 y φ_2.





Por construcción tenemos que $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en el espacio métrico $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Ejercicio 1: Pruebe que $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Ayuda: Note que para todo x se tiene $|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| < 2^{-k}$.

Ahora, como $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ es completo, el problema anterior implica que $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función continua φ. Esta función φ recibe el nombre de «la escalera del diablo» o, en otras fuentes, «función de Cantor-Lebesgue». De la definición de φ es directo que φ es creciente y que, más aún, que su imagen está contenida en el intervalo $[0,1]$. Ahora, como φ es continua y $[0,1]$ es conexo concluimos que $\varphi([0,1])$ es conexo. Como $\varphi([0,1]) \subseteq [0,1]$ y $0, 1 \in [0,1]$ concluimos que $\varphi([0,1]) = [0,1]$.

De esta forma, tenemos que $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ es una función continua, creciente y epiyectiva.

Problema 3: φ tiene derivada en el conjunto abierto O. Más aún, $\varphi' = 0$.

Comentario: Note que como $[0,1] = O \sqcup C$ (unión disjunta) y $m(C) = 0$ (ayt anterior), se tiene que $m(O) = 1$. Este problema nos dice que φ es una función que tiene derivada cero en un subconjunto «grueso» de $[0,1]$ sin ser constante (de hecho, dado que es epiyectiva, podríamos decir que φ «está lejos de ser constante»).

Sol: Notar que si $x \in O$ entonces $x \in O_k$ para algún k y, por tanto, x está alguno de los intervalos que componen a O_k. Ahora bien, como estos intervalos son abiertos, se sigue que hay una vecindad abierta de x contenida en dicho intervalo. Ahora, por construcción se tiene que φ es constante en cada uno de esos intervalos y, por tanto

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

existe y es cero. Como $x \in O$ es arbitrario concluimos que φ es derivable en O con derivada nula, como se quería.

Ejercicio 2: Una función $f : [a, b] \to [c, d]$ continua, estrictamente creciente (en particular inyectiva) y epiyectiva es un homeomorfismo (es decir tiene inversa continua).

Ayuda: Pruebe, más generalmente, que si $f : X \to Y$ es una función continua entre espacios métricos con X compacto entonces f es un homeomorfismo si y sólo si f es biyectiva.

Problema 4: Sea $\psi : [0, 1] \to [0, 2]$ la función definida vía $\psi(x) = x + \varphi(x)$. Se tiene que

a) ψ es un homeomorfismo

b) $\psi(C)$ tiene medida positiva

c) existe $A \subseteq [0, 1]$ medible tal que $\psi(A)$ no es medible

Sol:

a) ψ es continua por ser suma de continuas y es estrictamente creciente por ser suma de una creciente con una estrictamente creciente. Además es epiyectiva por el mismo argumento que prueba que φ lo es. De esta forma, por el ejercicio 2 se tiene que ψ es un homeomorfismo.

b) Tenemos que $[0, 1] = O \cup C$ y, por tanto, se tiene que
$$[0, 2] = \psi([0, 1]) = \psi(O) \cup \psi(C).$$
Ahora, como ψ es biyectiva y $O \cap C = \emptyset$ se sigue que $\psi(O) \cap \psi(C) = \emptyset$. De esta forma tenemos que
$$2 = m(\psi(O)) + m(\psi(C)). \tag{2}$$
Afirmamos que $m(\psi(O)) = 1$. En efecto: tenemos que O es una unión numerable de intervalos, digamos $O = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$. Para cada uno de estos intervalos se tiene que φ es constante y, por tanto, $\psi(I_k)$ no es más que un trasladado de I_k. De esta forma tenemos que $m(\psi(I_k)) = m(I_k)$. Así vemos que
$$m(\psi(O)) = m\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \psi(I_k)\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m(\psi(I_k)) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m(I_k) = m(O).$$
Ahora, como $m(C) = 0$, tenemos que $m(O) = 1$ y, por tanto $m(\psi(O)) = 1$. Así, por (2), concluimos que $m(\psi(C)) = 1 > 0$, como se quería.

c) Como $m(\psi(C)) > 0$ se tiene por Teorema de Vitali (problema 2 de esta ayt) que existe $W \subseteq \psi(C)$ tal que W no es medible. Sea $A := \psi^{-1}(W)$. Como ψ es inyectiva y $W \subseteq \psi(C)$ tenemos que $A \subseteq C$. Ahora, como C tiene medida nula se sigue, por monotonía, que $m^*(A) = 0$ y, por tanto, que A es medible. Sin embargo, como ψ es epiyectiva se tiene que $\psi(A) = W$ y, por tanto, A cumple las condiciones que queríamos.

Problema 5:

a) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y B es un boreleano entonces $f^{-1}(B)$ es un boreleano

b) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y estrictamente creciente entonces envía boreleanos en boreleanos

c) Use los puntos anteriores para concluir que no todo medible es un boreleano

Sol:

a) Sea $\mathcal{A} = \{B \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(B) \text{ es un boreleano}\}$. Tenemos que $\emptyset \in \mathcal{A}$ pues para toda función se tiene que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Para toda función se tiene además que

$$f^{-1}\left(\bigcup B_i\right) = \bigcup f^{-1}\left(\bigcup B_i\right)$$

y $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$. Por lo tanto, como los boreleanos forman una σ-álgebra, concluimos que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra. Ahora, como la preimagen de un abierto vía una función continua es abierto, concluimos que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra que contiene a los abiertos. Por definición la σ-álgebra $\mathcal{B}$ de los boreleanos es la σ-álgebra minimal que contiene a los abiertos de $\mathbb{R}$, por lo tanto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, como se quería.

b) Del ejercicio 2 tenemos que la función $g : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ es un homeomorfismo. Así la función g^{-1} es continua y, por tanto, para todo boreleano B de $[a, b]$ se tiene que $(g^{-1})^{-1}(B)$ es un boreleano (por la parte a)). Ahora bien, $(g^{-1})^{-1}(B) = g(B) = f(B)$. Así, como B es un boreleano arbitrario concluimos que f envía boreleanos en boreleanos.

c) Sea $\psi : [0, 1] \to [0, 2]$ la escalera del diablo. Por el problema 4 sabemos que existe un subconjunto medible A de $[0, 1]$ tal que $\psi(A)$ no es medible. Tenemos que A no es un boreleano pues si lo fuese, su imagen vía ψ (que es continua y creciente) sería un borelano y, por tanto, sería medible.