

Análisis Abstracto I
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile
Prof. Manuel Pinto J.
Ayt. Nelson Alvarado H.

Tarea 1

Fecha de entrega: 5 de Octubre

I. Decida justificadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ satisface que $m^*(A) = 0$ entonces A es acotado
2. Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$ con $m^*(A) = 0$ entonces A^c es denso
3. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ satisface que $m^*(A) < \infty$ entonces A es la unión de un conjunto acotado B y un conjunto C con $m^*(C) = 0$.
4. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es totalmente acotado entonces $m^*(A)$ puede calcularse usando cubrimientos **finitos**
5. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ es compacto entonces $m^*(A)$ puede calcularse usando cubrimientos **finitos**
6. Se tiene que

$$m^*(A) = \sup \{m^*(U) : U \subseteq A, U \text{ abierto}\}$$

7. Si $A \subseteq [0, 1]$ es medible entonces

$$m(A) = \sup \{m(C) : C \subseteq A, C \text{ es cerrado}\}$$

8. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ satisface que $m^*(A) > 0$ entonces existen $x, y \in A$ tales que $|x - y| \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

II. Un subconjunto E de $\mathbb{R}^n$ se dice *elemental* si existen cajas $C_1, \dots, C_r$ tales que $E = \cup_{i=1}^r C_i$. Denotamos por $\mathcal{E}_n$ al conjunto de todos los subconjuntos elementales de $\mathbb{R}^n$ y m^* a la medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Pruebe que si $m' : \mathcal{E}_n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ es una función finitamente aditiva e invariante por traslaciones entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $m'(E) = c \cdot m(E)$ para todo $E \in \mathcal{E}_n$.

III.

- a) Pruebe que un subconjunto E de $\mathbb{R}$ es medible si y sólo es unión de un boreleano y un conjunto de medida nula.
- b) Pruebe que si $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función lipschitziana entonces envía conjuntos medibles en conjuntos medibles

IV. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto Lebesgue-medible tal que

$$m(A \cap (a, b)) \leq \frac{b - a}{2}$$

para cualquier intervalo (a, b) . Pruebe que $m(A) = 0$.