Septiembre 2020
Análisis Abstracto I
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile
Prof. Manuel Pinto J.
Ayt. Nelson Alvarado H.

Ayudantía Semana 2: Conjuntos medibles

Nelson R. Alvarado H.

Hasta ahora tenemos una función $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ con ciertas buenas propiedades: es *normal* y **sub**aditiva. Desgraciadamente, no es σ-aditiva (es decir, $m^*\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right)$ no es necesariamente igual a $\sum m^*(E_i)$). Como vimos en la primera semana del curso, no podemos construir una función que permita medir **todos** los subconjuntos de $\mathbb{R}$, razón por la cual ahora nos restringiremos a *un buen dominio* de manera que esta función m^* (que según lo visto antes, parece ser una buena forma de *medir*) tenga las propiedades que en la sesión 1 establecimos que quisiéramos tener.

Diremos que un subconjunto E de $\mathbb{R}$ es *Lebesgue-medible* si se tiene que para todo $A \subseteq \mathbb{R}$ se cumple que

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A - E^c),$$

donde E^c denota al complemento de E en $\mathbb{R}$ (es decir, $E^c = \{x \in \mathbb{R} : x \notin E\}$). Denotamos por $\mathcal{M}$ al subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dado por los conjuntos Lebesgue-medibles. De esta forma, definimos la **medida de Lebesgue** (en $\mathbb{R}$) como la función

$$m : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

cuya regla de asignación está dada por $m(E) = m^*(E)$.

Notemos que en nuestra definición de medibilidad se exige una condicion de **aditividad** y en tal requerimiento radica una gran sutileza que impide medir cualquier conjunto (pese a que ya vimos en ayt 1 que siempre hay **sub**aditividad). Para empezar, trabajaremos un par de problemas que tienen como objetivo familiarizarnos con esta nueva definición, asumiendo el notable hecho (probado en la sección 3 del libro de Royden) de que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra:

Problema 1:

a) Si $E \subseteq \mathbb{R}$ es medible entonces cualquier trasladado $E + y = \{x + y : x \in E\}$ es medible.

b) Si E_1, E_2 son medibles entonces se tiene que

$$m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2) = m(E_1) + m(E_2)$$

c) Sean B un subconjunto (no necesariamente medible) de $\mathbb{R}$ y A un conjunto medible con $A \subseteq B$ y $m^*(A) < \infty$. En tal caso se tiene que

$$m^*(B - A) = m^*(B) - m(A).$$

Sol:

a) Para probar esta afirmación debemos probar que si A es un subconjunto **cualquiera** de $\mathbb{R}$ entonces se tiene que

$$m^*(A) = m^*(A \cap (E + y)) + m^*(A \cap (E + y)^c).$$

Para ello recordemos que la función m^* es invariante bajo traslaciones, por lo tanto $m^*(A) = m^*(A - y)$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Por otro lado, como E es medible y $A - y$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ se tiene que

$$m^*(A - y) = m^*\left((A - y) \cap E\right) + m^*\left((A - y) \cap E^c\right).$$

De esta forma, tenemos que

$$m^*(A) = m^*\left((A - y) \cap E\right) + m^*\left((A - y) \cap E^c\right).$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}(A - y) \cap E &= \{z \in \mathbb{R} : z = a - y, a \in A, z \in E\} \\ &= \{z \in \mathbb{R} : z + y \in A, z \in E\}\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$((A - y) \cap E) + y = (A \cap (E + y)).$$

Así, como m^* es invariante bajo traslaciones, concluimos que

$$m^*\left((A - y) \cap E\right) = m^*\left(A \cap (E + y)\right).$$

De manera análoga (ejercicio) vemos que

$$m^*\left((A - y) \cap E^c\right) = m^*\left(A \cap (E + y)^c\right)$$

y, por tanto,

$$m^*(A) = m^*(A \cap (E + y)) + m^*\left(A \cap (E + y)^c\right),$$

como se quería.

b) Como E_1 es medible y E_2 es un subconjunto de $\mathbb{R}$ se tiene que

$$m^*(E_2) = m^*(E_2 \cap E_1) + m^*(E_2 \cap E_1^c).$$

Por otro lado, como E_2 es medible y E_1 es un subconjunto de $\mathbb{R}$ se tiene que

$$m^*(E_1) = m^*(E_1 \cap E_2) + m^*(E_1 \cap E_2^c).$$

Así, sumando ambas expresiones vemos que

$$m^*(E_1) + m^*(E_2) = m^*(E_1 \cup E_2) + m^*(E_2 \cup E_1) + m^*(E_2 \cap E_1^c) + m^*(E_1 \cap E_2^c).$$

Ahora bien, como $\{E_2 \cap E_1, E_2 \cap E_1^c, E_1 \cap E_2^c\}$ es una familia de conjuntos medibles (cor. 3.8) disjunta por pares, se tiene (por prop. 3.13) que

$$m^*(E_2 \cap E_1) + m^*(E_2 \cap E_1^c) + m^*(E_1 \cap E_2^c) = m^*\left((E_2 \cap E_1) \cup (E_2 \cap E_1^c) \cup (E_1 \cap E_2^c)\right) = m^*(E_1 \cup E_2).$$

Así vemos que

$$m^*(E_1) + m^*(E_2) = m^*(E_1 \cap E_2) + m^*(E_1 \cup E_2),$$

como se quería.

c) Como A es medible y B es un subconjunto de $\mathbb{R}$ se tiene que

$$m^*(B) = m^*(B \cap A) + m^*(B \cap A^c) = m^*(B \cap A) + m^*(B - A).$$

Ahora, como $A \subseteq B$ se tiene que $A \cap B = A$ y, por tanto,

$$m^*(B) = m^*(A) + m^*(B - A).$$

Finalmente, como $m^*(A) < \infty$, podemos restar $m^*(A)$ a ambos lados de la última ecuación y obtener que

$$m^*(B) - m^*(A) = m^*(B - A),$$

como se quería.

Comentario: Observe que si $m^*(A) = \infty$ (y por tanto, por monotonía, $m^*(B) = \infty$) entonces la expresión $m^*(B) - m^*(A)$ no tiene mayor sentido. Por ejemplo, si $A = (n, \infty)$ y $B = (0, \infty)$ entonces $B - A = (0, n]$, en cuyo caso $m^*(B - A) = n$. Conclusión: al restar la medida de un conjunto se debe tener cuidado...

El siguiente problema tiene como objetivo dar distintas caracterizaciones al hecho de que un subconjunto de $\mathbb{R}$ sea medible. Estas caracterizaciones suelen ser más cómodas y útiles que nuestra definición original.

Problema 2: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Las siguientes aserciones son equivalentes:

I) A es medible

II) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un abierto O_ε con $A \subseteq O_\varepsilon$ y $m^*(O_\varepsilon - A) < \varepsilon$.

III) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un cerrado F_ε con $A \supseteq F_\varepsilon$ y $m^*(A - F_\varepsilon) < \varepsilon$

IV) Existe un conjunto de tipo G_δ (intersección numerable de abiertos) G tal que $m^*(G - A) = 0$

v) Existe un conjunto de tipo F_σ (unión numerable de cerrados) F tal que $m^*(A - F) = 0$.

Comentario: Notemos que, simplemente por definición de m^* como un ínfimo, vimos que existe un abierto $O_\varepsilon \supseteq A$ tal que

$$m^*(O) < m^*(A) + \varepsilon.$$

Sin embargo esto NO es lo mismo que decir que $m^*(O - A) < \varepsilon$. En efecto: la igualdad $m^*(O - A) = m^*(O) - m^*(A)$ **no** es cierta en general, pero sí cuando A es medible y $m^*(A) < \infty$. En general, por subaditividad de m^*, siempre se tiene que

$$m^*(O) \leq m^*(A) + m^*(O - A)$$

pero esta desigualdad **no** nos sirve para concluir que $m^*(O - A) < \varepsilon$.

Sol:

i) $\Longrightarrow$ ii) : Supongamos primero que $m^*(A) < \infty$. En tal caso, de lo discutido antes, existe un abierto $O_\varepsilon \supseteq A$ tal que

$$m^*(O_\varepsilon) - m^*(A) < \varepsilon.$$

Ahora, como A es medible de medida finita y $A \subseteq O_\varepsilon$ se tiene, por problema 1 parte c), que

$$m^*(O - A) = m^*(O) - m^*(A)$$

y, por tanto, $m^*(O - A) < \varepsilon$, como se quería.

Veamos ahora el caso general. Tenemos que

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap [-n, n]),$$

donde $A_n := A \cap [-n, n]$ es medible (por ser intersección de medibles) de medida finita (por ser acotado). Ahora, como A_n es medible de medida finita, lo hecho en el párrafo anterior nos dice que dado $\varepsilon > 0$ existe un abierto $O_n \supset A_n$ tal que

$$m^*(O_n - A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Sea $O = \cup O_n$. Como $A = \cup A_n$ y $A_n \subseteq O_n$ vemos que $A \subseteq O$. Ahora bien, tenemos que

$$O - A = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n \right) - A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (O_n - A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(O_n \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c \right) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (O_n - A_n)$$

y, por tanto,

$$m^*(O - A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(O_n - A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon,$$

como se quería.

ii) $\implies$ iv) : Por hipótesis se tiene que para cada n existe un abierto O_n tal que

$$m^*(O_n - A) < \frac{1}{n}.$$

Sea $G = \bigcap O_n$. G es de tipo G_δ y además se tiene, para cada $n \in \mathbb{N}$, que

$$G - A = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \right) \cap A^c \subseteq O_n \cap A^c = O_n - A.$$

De esta forma, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$0 \leq m^*(G - A) \leq m^*(O_n - A) < \frac{1}{n}$$

y, por tanto, tomando $n \to \infty$ vemos que

$$m^*(G - A) = 0,$$

como se quería.

iv) $\implies$ i) : Supongamos que existe tal G. Como $m^*(G - A) = 0$ y los conjuntos de medida cero son medibles (lema 6) y los conjuntos medibles forman una álgebra de conjuntos, tenemos que

$$A = G \cap (G - A)^c$$

es medible.

Ahora bien, tomando complementos, usando el hecho de que la medibilidad de un conjunto es equivalente a la de su complemento y de que el complemento de un G_δ es un F_σ (pues el complemento de un abierto es cerrado), concluimos fácilmente el resto de las equivalencias.

Problema 3: Si A es un subconjunto medible de $\mathbb{R}$ con $m(A) < \infty$ entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un compacto $K_\varepsilon \subseteq A$ tal que $m(A - K_\varepsilon) < \varepsilon$.

Sol: Como ya vimos, dado ε existe un cerrado F_ε tal que $m(A - F_\varepsilon) < \varepsilon/2$. Sea $F_\varepsilon^{(n)} := F_\varepsilon \cap [-n, n]$. Tenemos que

$$F_\varepsilon = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_\varepsilon^{(n)}$$

y que cada $F_\varepsilon^{(n)}$ es compacto (Â¿*por qué?*). Notemos que

$$A - F_\varepsilon = A \cap \left(\bigcup F_\varepsilon^{(n)} \right)^c = A \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_\varepsilon^{(n)} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A \cap F_\varepsilon^{(n)}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A - F_\varepsilon^{(n)}.$$

Ahora bien, como $F_\varepsilon^{(n)} \subseteq F_\varepsilon^{(n+1)}$ se tiene que $\{A - F_\varepsilon^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos medibles. Así, como $A - F_\varepsilon^{(1)} \subseteq A$ y $m(A) < \infty$ vemos (prop. 3.14) que

$$\lim_{n \to \infty} m(A - F_\varepsilon^{(n)}) = m(A - F_\varepsilon).$$

De esta forma, para n suficientemente grande se tiene que

$$-\frac{\varepsilon}{2} < m(A - F_\varepsilon^{(n)}) - m(A - F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

y, por tanto,

$$m(A - F_\varepsilon^{(n)}) < \frac{\varepsilon}{2} + m(A - F_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Finalmente, como $F_\varepsilon^{(n)}$ es compacto (por ser cerrado y acotado), concluimos lo que se quiere.

Ejercicio: Pruebe que si A tiene medida positiva y finita entonces el compacto K_ε puede ser escogido con medida positiva.

Problema 4: *Conjunto de Cantor* Sabemos que todo subconjunto numerable de $\mathbb{R}$ tiene medida cero. A continuación introduciremos un conjunto no numerable de medida nula. Este conjunto, el conjunto de Cantor, es un ejemplo clásico utilizado en análisis (y en topología) para refutar enunciados que pareciesen ser intuitivamente ciertos.

Sea $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ el conjunto obtenido al remover el tercio central al intervalo $[0, 1]$. De la misma forma, sea

$$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$$

el conjunto que se obtiene al remover el tercio central de cada una de las componentes conexas de C_1. Iterando este proceso obtenemos, para cada $k \in \mathbb{N}$, un conjunto C_k que es la unión de 2^k intervalos de largo $1/3^k$. Definimos el conjunto de Cantor C como la intersección de los C_k. Afirmamos que este conjunto tiene las propiedades que buscamos: es no numerable y de medida nula.

En primer lugar, veremos que tiene medida nula: notemos que, como los intervalos son medibles (teorema 3.12) y C_k es unión de 2^k intervalos disjuntos de largo $1/3^k$, se tiene que C_k es medible y

$$m(C_k) = 2^k \cdot \frac{1}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

Ahora bien, como $C \subseteq C_k$ para todo k, se tiene, por monotonía, que

$$0 \leq m^*(C) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. De esta forma, tomando $k \to \infty$ vemos que $m^*(C) = 0$. De esto deducimos también que C es medible.

Veremos ahora que C no es numerable. Para probar esto procederemos por contradicción: supongamos que podemos enumerar C como $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Tenemos que C_1 es unión de dos intervalos disjuntos, digamos D_1, D_2. Como D_1 y D_2 son disjuntos, alguno de ellos no contiene a c_1. Llamamos F_1 a tal intervalo. Ahora bien, F_1 es también unión de dos intervalos disjuntos, de los cuales al menos uno no contiene a c_2. Llamamos a este intervalo F_2. Iterando este proceso inductivamente podemos encontrar, para cada k, un intervalo F_k

contenido en F_{k-1} tal que $c_k \notin C_k$. Más aún, por construcción se tiene que F_k es cerrado, que $F_k \neq \emptyset$ y que $F_k \subseteq C_k$. Como la sucesión $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de cerrados no vacíos se tiene que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k \neq \emptyset$ (*Â¿por qué?*). Sea entonces $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k$. Como $F_k \subseteq C_k$ y $\bigcap C_k = C$ se tiene que $x \in C$ y, por tanto, $x = c_n$ para algún n. De esta forma tenemos que $x \notin C_n$, contradiciéndose el hecho de que $x \in \bigcap C_k$. Concluimos entonces que tal numeración no puede existir y, por tanto, que C no es numerable.

Se dejan al lector los siguientes ejercicios y problemas, los cuales deben pensarse como complemento de los ejercicios y problemas del libro, así como de los presentados en esta ayudantía.

1. Pruebe que un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es medible si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un cerrado F_ε y un abierto O_ε con $F_\varepsilon \subseteq A \subset O_\varepsilon$ tales que $m^*(O_\varepsilon - F_\varepsilon) < \varepsilon$.

2. Use la aditividad finita y la continuidad de la medida de Lebesgue (es decir, la prop. 3.14) para probar la σ-aditividad de la medida de Lebesgue

3. Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}$ con $m^*(E) < \infty$. Pruebe que E es medible si y sólo si

$$b - a = m^*((a, b) \cap E) + m^*((a, b) - E)$$

   para todo intervalo finito (a, b).

4. Si A es un conjunto **no** medible entonces existe un abierto O con $A \subseteq O$ tal que

$$m^*(O - A) > m^*(O) - m^*(A).$$

5. (Lema de Borel-Cantelli) Sea $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una colección numerable de subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty$. Pruebe que

$$m^*\left(\{x \in \mathbb{R} : x \in E_k \text{ para infinitos } k\}\right) = 0$$

6. Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$ (es decir, $E_k \subseteq E_{k+1}$ para todo k) entonces se tiene que

$$m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m\left(E_n\right)$$

7. Pruebe que el conjunto de Cantor es compacto y tiene interior vacío

8. El objetivo de este problema es dar una demostración alternativa al hecho de que el conjunto de Cantor es no numerable. Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ se dice *perfecto* si es cerrado, no vacío y cualquier vecindad de cualquier punto de A contiene infinitos puntos de A. Pruebe que el conjunto de Cantor es perfecto y que todo conjunto perfecto es no numerable. Concluya.