Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Ecuaciones Diferenciales

Ejercicios de ayudantía

Bastián Núñez Boettiger

Primavera 2020*

Profesora: Verónica Poblete Oviedo

Ayudantes: Bastián Núñez
Víctor Muñoz
Camilo Lagos

Índice

*Versión del 16 de diciembre de 2020.

Ayudantía 1: Existencia y Unicidad

1. Sea $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Considere el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = a(t)x, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

a) Compruebe que $x(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(t)\,\mathrm{d}t\right) x_0$ es una solución del P.V.I. en un intervalo abierto que contiene a t_0.

b) ¿Cuál es el intervalo maximal donde está definida esta solución?

c) Esta solución ¿es única en cada punto del dominio de la ecuación? Justifique.

2. Determine el dominio D de cada ecuación diferencial; esto es, el conjunto de puntos donde la ecuación diferencial está bien definida. ¿Se cumplen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad en todo punto de D?

a) $x' = |t|x$.

b) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{xy}{x^2 + y^2 - 1}$.

c) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1 + |x|}{1 - |t|}$.

3. Use el esquema de iteración de Picard (Guía 2) para encontrar la solución de los siguientes PVI, y encuentre el dominio maximal de la solución:

a) $\begin{cases} x' = x + 5, \\ x(0) = 1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = \dfrac{x}{2}, \\ x(1) = 1. \end{cases}$

Ayudantía 2: Sistemas Lineales

1. Encuentre la solución de los P.V.I. y bosqueje el diagrama de fase en cada caso:

a) $\begin{cases} x' = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$

2. Sea $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ una matriz con valores propios reales y negativos. Demuestre que toda solución $x(t)$ de $x' = Ax$ verifica $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = (0,0)$.

3. Sea $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ una matriz con valores propios -2, $1+i$ y $1-i$. Suponga además que $\dim_{\mathbb{R}} \ker(A+2I) = 1$. Encuentre la forma de Jordan de A, y la solución del P.V.I.

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

en términos de una matriz cambio de base $P \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ invertible.

4. Encuentre la solución del P.V.I.

$$\begin{cases} x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} x, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

5. Encuentre la solución del P.V.I.

$$\begin{cases} x' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

Ayudantía 3: Separación de variables y ecuaciones no homogéneas

1. Obtenga la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $x' = x + 9$

b) $x' = \dfrac{x^2 - 4}{t}$

2. Resuelva el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = (1-x)x, \\ x(0) = 1/2. \end{cases}$$

Esta ecuación se conoce como la *ecuación diferencial logística* y tiene amplias aplicaciones en ecología, química, demografía, ciencias sociales y estadística.

3. Sea $a \in \mathbb{R}$ una constante. Obtenga la solución general de la ecuación diferencial

$$x' = -ax + \cos(t).$$

Ayudantía 4: Diagramas de fase y ecuaciones lineales no homogéneas

En esta ayudantía veremos una forma sistemática de dibujar diagramas de fase, además de repasar los métodos para resolver ecuaciones lineales no homogéneas.

1. Bosqueje el diagrama de fases de los siguientes sistemas lineales planares.

$$\text{a)} \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x + 3y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3x - y. \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - 5y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2x + 3y. \end{cases}$$

2. En este ejercicio ilustraremos cómo puede cambiar el diagrama de fases de una ecuación lineal al agregar una perturbación.

a) Obtenga la solución general de la ecuación escalar $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2y$ y bosqueje un diagrama de fases sobre el plano xy.

b) Demuestre que si $c \in \mathbb{R}$, toda solución de $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2y + c$ converge cuando $x \to +\infty$. Bosqueje un diagrama de fases en el plano xy cuando $c = 1$. *(Indicación: Use el cambio de variables $y = z + \frac{c}{2}$. ¿Puede generalizar para una ecuación del tipo $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ay + c$ con $a, c \in \mathbb{R}$?)*

c) Demuestre que toda solución de la ecuación no homogénea

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2y + x$$

diverge cuando $x \to +\infty$. Bosqueje un diagrama de fases.

d) Demuestre que toda solución de la ecuación no homogénea

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2y + \frac{e^{-x}}{1 + x^2}$$

converge a 0 cuando $x \to +\infty$. Bosqueje un diagrama de fases. *(Indicación: Use variación de parámetros, pero en lugar de evaluar la integral encuentre una cota para $|y(x)|$.)*

3. Encuentre la solución del sistema no homogéneo

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x + y - t, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -y + 1, \end{cases}$$

que verifica la condición inicial $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Ayudantía 5: Ecuaciones Exactas y Factor Integrante

Determine si las siguientes EDO son exactas. De ser así, encuentre la solución general. Si no, busque un factor integrante de ser posible.

1. $y\,\mathrm{d}x + \left(x + \dfrac{2}{y}\right)\mathrm{d}y = 0.$

2. $(2xy^3 + y\cos x)\,\mathrm{d}x + (3x^2y^2 + \operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}y = 0.$

3. $(x+2)\operatorname{sen} y\,\mathrm{d}x + x\cos y\,\mathrm{d}y = 0.$

4. $(y\log y - 2xy)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y = 0.$

Ayudantía 6: Ecuaciones de Bernoulli y Riccati + repaso Prueba 2

El objetivo del primer ejercicio es lograr identificar los distintos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden vistos hasta el momento, además de identificar cuándo y cómo usar cambios de variable para simplfiicar la ecuación.

1. Para las siguientes ecuaciones diferenciales, identifique el dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ donde se verifican las hipótesis del teorema de existencia y unicidad. Luego, encuentre la solución general de ser posible, o una relación implícita si no.

a) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{y} - y.$

b) $xy^2y' + y^3 = x\cos x.$

c) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x-y}{1-x+y}$ *(Prueba 2, 2019)*

d) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2x}{t} + \cos\left(\dfrac{x}{t^2}\right).$

2. La propagación de una decisión económica en una población (como comprar en un "*Cyber Monday*") puede depender parcialmente de factores económicos (precio, calidad y coste de mantenimiento) y parcialmente de la tendencia humana a imitar a sus pares. El incremento de la proporción $y(t) \in [0,1]$ de la población que ha realizado la acción puede expresarse mediante la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (1-y)(s(t) + Iy), \tag{$*$}$$

donde $s(t)$ es una función integrable que mide el estímulo externo e $I > 0$ es una constante llamada *coeficiente de imitación.*

a) Encuentre la solución general de $(*)$. (Note que es una ecuación de Riccati.)

b) Hallar $y(t)$ cuando $s(t) = -0{,}1$ e $I = 0{,}2$. ¿Qué ocurre cuando $t \to +\infty$? Interprete en términos del modelo.

c) Hallar $y(t)$ cuando el estímulo externo decrece con el avance del tiempo, definiendo $s(t) = \dfrac{1}{1+t}$. ¿Qué ocurre cuando $t \to +\infty$?

3. Determine si las siguientes ecuaciones son o no exactas, y encuentre la solución general de ser posible. Si no es posible, encuentre una relación implícita que deban verificar las soluciones.

a) $(e^t y + te^t y)\,\mathrm{d}t + (te^t + 2)\,\mathrm{d}y = 0.$

b) $(3x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x + (xy - x^3y^{-1})\,\mathrm{d}y = 0.$

Ayudantía 7: Ecuaciones lineales de segundo orden

En esta ayudantía veremos algunas generalidades sobre ecuaciones de segundo orden.

1. Demuestre que si $y_p(x)$ es una solución particular de la EDO no homogénea

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = d(x), \tag{$\star$}$$

y $y_h(x) = y_h(x, c_1, c_2)$ es la solución general de la EDO homogénea correspondiente

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0, \tag{$\star\star$}$$

entonces la solución general de $(\star)$ es $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

2. Use el *método de coeficientes indeterminados* para encontrar soluciones particulares de las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden:

a) $y'' - 3y = 4$.

b) $y'' + 2y = 6e^x$.

c) $y'' - y = \operatorname{sen}(x)$.

d) $y'' - 2y' + y = \cos(4x)$.

e) $y'' = (3x + 2)\cos(x)$.

f) $y'' = x^2 e^{3x}$.

3. Pruebe que $(\star\star)$ tiene a lo más dos soluciones L.I.; en particular demuestre que si existe una solución, entonces tiene *exactamente* dos soluciones L.I., por lo que el espacio vectorial $\mathbb{S}$ de soluciones de $(\star\star)$ cumple $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{S} = 2$ si hay soluciones, o bien $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{S} = 0$ si no las hay.

4. La *fórmula de Abel* nos permite encontrar una segunda solución de la ecuación $(\star\star)$, suponiendo que conocemos una. Además nos garantiza que estas son linealmente independientes. Para cada una de las siguientes EDO encuentre una solución y_2 a partir de la y_1 dada, y encuentre así la solución general.

a) $y'' + y = 0$, con $y_1 = \operatorname{sen}(x)$.

b) $y'' - y = 0$, con $y_1 = e^x$.

c) $x^2 y'' + xy' - 4y = 0$, con $y_1 = x^2$.

d) $y'' - \dfrac{x}{x-1}y' + \dfrac{1}{x-1}y = 0$, con $y_1 = x$.

Ayudantía 8: Variación de constantes y la transformada de Laplace

En esta ayudantía veremos el método de variación de constantes para encontrar soluciones de ecuaciones lineales de segundo orden no homogéneas, y estudiaremos el operador $\mathcal{L}[\cdot]$ de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones y sistemas diferenciales.

1. Usando variación de constantes, encuentre la solución general de las siguientes EDO.

a) $ty'' - (t+1)y' + y = t^2$, sabiendo que $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = t + 1$ son soluciones de la EDO homogénea $ty'' - (t+1)y' + y = 0$.

b) $t^2y'' - 2y = \dfrac{3}{t}$, sabiendo que $y_h(t) = c_1t^2 + c_2\dfrac{1}{t}$ es una solución de $t^2y'' - 2y = 0$.

c) $t^2y'' - 6y = t^4$, sabiendo que $y_h(t) = c_1t^3 + c_2\dfrac{1}{t^2}$ es una solución de $t^2y'' - 6y = 0$.

2. Calcule la transformada de Laplace $\hat{f}(s)$ de las siguientes funciones $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$; explicite para cuáles valores de s está bien definida.

a) $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{R}$ fijo.

b) $f(t) = (t + a)^2$, $a \in \mathbb{R}$ fijo.

c) $f(t) = \operatorname{sen}(at)$, $a \in \mathbb{R}$ fijo.

d) $f(t) = \cosh(at)(= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}))$.

e) $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < t \leq 1, \\ 0, & \text{si } t > 1. \end{cases}$

3. Encuentre las siguientes transformadas inversas.

a) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^5}\right]$.

b) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2 + 7}\right]$.

c) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{-2s + 6}{s^2 + 4}\right]$.

d) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right]$.

4. Para las siguientes EDO, encuentre la solución general del sistema homogéneo y use la transformada de Laplace para resolver el sistema no homogéneo, con las condiciones iniciales dadas.

a) $y'' - 3y' + 2y = e^{-t}\operatorname{sen}(2t), \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

b) $y'' + 2y = 2\cos(5t), \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

c) $y'' + 4y' + 4y = t^4e^{-2t}, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

Ayudantía 9: Repaso Prueba 3

En el primer ejercicio de esta ayudantía repasaremos algunas generalidades sobre ecuaciones de segundo orden. En los demás, aplicaremos la transformada de Laplace para resolver ecuaciones, con énfasis en la función escalón unitario de Heaviside $u(\cdot)$ y en la propiedad de convolución.

1. Considere la ecuación diferencial de segundo orden:

$$t^2 y''(t) + 3ty'(t) + y(t) = 0.$$

a) Sabiendo que $y_1(t) = \dfrac{1}{t}$ es una solución particular, encuentre la solución general.

b) Encuentre la solución general de la siguiente ecuación no homogénea:

$$t^2 y''(t) + 3ty'(t) + y(t) = t^2.$$

2. Encuentre la solución del sistema diferencial con valores iniciales:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} &= t^2, \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} &= 4t, \\ x(0) &= 8, \\ y(0) = x'(0) = y'(0) &= 0. \end{cases}$$

3. Resuelva el problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = f(t), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1, \end{cases}$$

donde la función $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ está definida por $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq \pi, \\ \operatorname{sen}(t - \pi), & \text{si } t > \pi. \end{cases}$

4. Usando convolución, resuelva el problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'' + y = t \operatorname{sen}(t), \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Ayudantía 10: Repaso Prueba Recuperativa

Recordaremos algunas cosas de ecuaciones de primer orden y repasaremos la transformada de Laplace. Recomendamos también repasar sistemas lineales,

1. Considere la ecuación diferencial

$$xy' = 2x^2y + y\log(y),$$

a) Describa los puntos $(x, y) \subset \mathbb{R}^2$ donde se tiene existencia y unicidad.

b) Encuentre la solución general, usando el cambio de variable $z = \log(y)$.

c) Encuentre la solución particular que verifica $y(1) = 1$.

2. Encuentre la solución general de la ecuación

$$y' = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5,$$

sabiendo que $y_1(x) = x$ es una solución particular.

3. Resuelva la ecuación diferencial

$$(7x^4y - 3y^8)\,\mathrm{d}x + (2x^5 - 9xy^7)\,\mathrm{d}y = 0$$

sabiendo que tiene un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = x^my^n$.

4. Considere el problema de valores iniciales

$$y'' + 6y' + 9y = t^4e^{-2t}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Encuentre la solución general del sistema homogéneo, y use la transformada de Laplace para encontrar la solución particular que satisface el P.V.I.