

Presentación



Ayudante: Camilo Andrés Lagos Vasquez

Problema 1

Determine las siguientes transformadas de laplace

$$a) \quad \mathcal{L}(t^n)$$

$$b) \quad \mathcal{L}(e^{at} f(t))$$

$$c) \quad \mathcal{L}(u(t - a)) \quad a > 0$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

a) : Calculemos algunos casos

$$\mathcal{L}(t) = \int_0^{\infty} te^{-st} dt$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t) &= \left(-\frac{t}{s} e^{-st} \right) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{s^2}\end{aligned}$$

Veamos para $n=2$, $n=3$

$$\mathcal{L}(t^2) = \int_0^{\infty} t^2 e^{-st} dt$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t^2) &= \left(-\frac{t^2}{s} e^{-st} \right) \Big|_0^{\infty} + \frac{2}{s} \int_0^{\infty} t e^{-st} dt \\ &= \frac{2}{s^3}\end{aligned}$$

Con el mismo proceso llegamos

$$\mathcal{L}(t^3) = \frac{6}{s^4}$$

Escribir solución

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Si aun hay dudas, se puede realizar una demostracion por induccion

Sigamos con la parte b)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{at} f(t)) &= \int_0^{\infty} e^{at} f(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s-a)t} dt\end{aligned}$$

Usar la definición

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s-a)t}dt$$

Esto es evaluar $\mathcal{L}(f(t))$ en $s - a$

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t), s) = \mathcal{L}(f(t), s - a)$$

Sigamos con la parte c)

$$\mathcal{L}(u(t - a)) = \int_0^{\infty} u(t - a)e^{-st}dt$$

Recordando la definición

$$\mathcal{L}(u(t-a)) = \int_0^a u(t-a)e^{-st}dt + \int_a^\infty u(t-a)e^{-st}dt$$

Por la definicion de $u(t)$ la integral de la izquierda es nula

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u(t-a)) &= \int_a^\infty e^{-st}dt \\ &= \left(-\frac{1}{s}e^{-st} \right) \Big|_a^\infty \\ &= \frac{1}{s}e^{-sa}\end{aligned}$$

Preguntas



Problema 2

Resuelva el siguiente problema de valor inicial

$$x'' - x' - 6x = 6e^{3t} + 2e^{-2t}$$

$$x(0) = 0 \quad x'(0) = \frac{4}{5}$$

Paso 1: Calculemos algunas TL

$$\mathcal{L}(x') = s\mathcal{L}(x) - x(0) = s\mathcal{L}(x)$$

$$\mathcal{L}(x'') = s^2\mathcal{L}(x) - sx(0) - x'(0) = s^2\mathcal{L}(x) - \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(6e^{3t} + 2e^{-2t}) &= 6\mathcal{L}(e^{3t}) + 2\mathcal{L}(e^{-2t}) \\ &= 6\frac{1}{s-3} + 2\frac{1}{s+2}\end{aligned}$$

Paso 2: Usemos TL en la ecuación

$$\mathcal{L}(x'') - \mathcal{L}(x') - 6\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(6e^{3t} + 2e^{-2t})$$

Reemplazando las TL calculadas

$$s^2 \mathcal{L}(x) - \frac{4}{5} - s\mathcal{L}(x) - 6\mathcal{L}(x) = 6\frac{1}{s-3} + 2\frac{1}{s+2}$$



$$(s^2 - s - 6) \mathcal{L}(x) = 6\frac{1}{s-3} + 2\frac{1}{s+2} + \frac{4}{5}$$

Paso 3: Arreglar los términos

Como $(s^2 - s - 6) = (s - 3)(s + 2)$

$$\mathcal{L}(x) = 6 \frac{1}{(s - 3)^2 (s + 2)} + 2 \frac{1}{(s + 2)^2 (s - 3)} + \frac{4}{5} \frac{1}{(s - 3)(s + 2)}$$

Se ve feo, pero al usar fracciones parciales queda

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) &= \frac{6}{5} \frac{1}{(s - 3)^2} - \frac{2}{5} \frac{1}{(s + 2)^2} \\ &= \frac{6}{5} \mathcal{L}(t, s - 3) - \frac{2}{5} \mathcal{L}(t, s + 2)\end{aligned}$$

Escribir solución

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) &= \frac{6}{5}\mathcal{L}(te^{3t}) - \frac{2}{5}\mathcal{L}(te^{-2t}) \\ &= \mathcal{L}\left(\frac{6}{5}te^{3t} - \frac{2}{5}te^{-2t}\right)\end{aligned}$$

Por unicidad de la TL obtenemos

$$x(t) = \frac{6}{5}te^{3t} - \frac{2}{5}te^{-2t}$$

Preguntas



Problema 3

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' + x - y = e^t$$

$$y' - x + y = e^t$$

$$x(0) = 1$$

$$y(0) = 1$$

Usando TL

Pasando la transformada de laplace

$$\mathcal{L}(x') + \mathcal{L}(x) - \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(e^t)$$

$$\mathcal{L}(y') - \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(e^t)$$

Las condiciones iniciales implican:

$$\mathcal{L}(x') = s\mathcal{L}(x) - 1 \qquad \mathcal{L}(y') = s\mathcal{L}(y) - 1$$

Ademas tenemos la igualdad

$$\mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{s-1}$$

Reemplazando

$$(s + 1)\mathcal{L}(x) - \mathcal{L}(y) = \frac{1}{s - 1} + 1$$

$$(s + 1)\mathcal{L}(y) - \mathcal{L}(x) = \frac{1}{s - 1} + 1$$

Para resolver el sistema de ecuaciones primero encontrare $\mathcal{L}(y)$

Despejando $\mathcal{L}(x)$ de la ecuacion de abajo y reemplazandola arriba obtenemos

$$(s + 1)^2\mathcal{L}(y) - (s + 1) \left(\frac{1}{s - 1} + 1 \right) - \mathcal{L}(y) = \frac{1}{s - 1} + 1$$

Sumando y factorizando obtenemos

Despejar

$$(s^2 + 2s)\mathcal{L}(y) = (s + 2) \left(\frac{1}{s - 1} + 1 \right)$$

Dividiendo por $(s^2 + 2s) = s(s + 2)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y) &= \frac{1}{s(s - 1)} + \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s - 1} \\ &= \mathcal{L}(e^t)\end{aligned}$$

Obtener funciones

Por unicidad de TL $y = e^t$

Recordando $y' - x + y = e^t$

Reemplazando $e^t - x + e^t = e^t$

$$\longrightarrow x = e^t$$

Preguntas



Problema 4

Resuelva

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{s-a} \frac{1}{(s-b)^2}$$

Usare convoluciones

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s - a} \qquad \mathcal{L}(te^{bt}) = \frac{1}{(s - b)^2}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) &= \mathcal{L}(e^{at})\mathcal{L}(te^{bt}) \\ &= \mathcal{L}(e^{at} * te^{bt})\end{aligned}$$

La definicion de convolucion da

$$e^{at} * te^{bt} = \int_0^t e^{a(t-t')} t' e^{bt'} dt'$$

Continuando la integración

$$e^{at} * te^{bt} = e^{at} \int_0^t t' e^{(b-a)t'} dt'$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned} e^{at} * te^{bt} &= e^{at} \left(\left(t' \frac{1}{b-a} e^{(b-a)t'} \right) \Big|_0^t - \frac{1}{b-a} \int_0^t e^{(b-a)t'} dt' \right) \\ &= e^{at} \left(\frac{t}{b-a} e^{(b-a)t} - \frac{1}{(b-a)^2} \left(e^{(b-a)t'} \Big|_0^t \right) \right) \end{aligned}$$

Escribir solución

$$\begin{aligned} e^{at} * te^{bt} &= e^{at} \left(\frac{t}{b-a} e^{(b-a)t} + \frac{1}{(b-a)^2} - \frac{1}{(b-a)^2} e^{(b-a)t} \right) \\ &= \frac{t}{b-a} e^{bt} + \frac{1}{(b-a)^2} e^{at} - \frac{1}{(b-a)^2} e^{bt} \end{aligned}$$

Como $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(e^{at} * te^{bt})$

$$\longrightarrow x = e^{at} * te^{bt} = \frac{t}{b-a} e^{bt} + \frac{1}{(b-a)^2} e^{at} - \frac{1}{(b-a)^2} e^{bt}$$

Ejercicios propuestos

