

Presentación



Ayudante: Camilo Andrés Lagos Vasquez

Problema 1

Determine las siguientes transformadas de laplace

a) $\mathcal{L}(t^n)$

b) $\mathcal{L}(e^{at} f(t))$

c) $\mathcal{L}(u(t - a))$ $a > 0$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



a) : Calculemos algunos casos

$$\mathcal{L}(t) = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt$$

Integrando por partes

$$\mathcal{L}(t) = \left(-\frac{t}{s} e^{-st} \right) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{s} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{s^2}$$

$$\frac{1}{s^2}$$

211

Veamos para $n=2$, $n=3$

$$\mathcal{L}(t^2) = \int_0^{\infty} t^2 e^{-st} dt$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t^2) &= \left(-\frac{t^2}{s} e^{-st} \right) \Big|_0^{\infty} + \frac{2}{s} \int_0^{\infty} t e^{-st} dt \\ &= \frac{2}{s^3} \end{aligned}$$

Con el mismo proceso llegamos

$$\mathcal{L}(t^3) = \frac{6}{s^4}$$

Handwritten notes and calculations:

$$\begin{aligned} u &= t^2 \\ dv &= e^{-st} \\ du &= 2t dt \\ v &= -\frac{1}{s} e^{-st} \end{aligned}$$
$$\int_0^{\infty} t^2 e^{-st} dt = -\frac{t^2}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} + \frac{2}{s} \int_0^{\infty} t e^{-st} dt$$

$\mathcal{L}(t)$

Escribir solución

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

cos
sin

Si aun hay dudas, se puede realizar una demostracion por induccion

Sigamos con la parte b)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{at} f(t)) &= \int_0^{\infty} e^{at} f(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-\underline{(s-a)}t} dt\end{aligned}$$

Escribir solución

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Si aun hay dudas, se puede realizar una demostracion por induccion

Sigamos con la parte b)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{at} f(t)) &= \int_0^{\infty} e^{at} f(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s-a)t} dt\end{aligned}$$

$$L(x') = \int_0^{\infty} x' e^{-st} dt$$

$$= \left(x e^{-st} \right)_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} x e^{-st} dt$$

$$= -x[0] + s L(x)$$

$$= s L(x) - x[0]$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2$$

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt}$$

$$Lx = (s^2 + s)x$$

Usar la definición

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s-a)t} dt$$

Esto es evaluar $\mathcal{L}(f(t))$ en $s - a$

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s - a)$$

Sigamos con la parte c)

$$\mathcal{L}(u(t - a)) = \int_0^{\infty} u(t - a)e^{-st} dt$$



Recordando la definición

$$\mathcal{L}(u(t-a)) = \int_0^a u(t-a)e^{-st} dt + \int_a^\infty u(t-a)e^{-st} dt$$

Por la definición de $u(t)$ la integral de la izquierda es nula

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u(t-a)) &= \int_a^\infty e^{-st} dt \\ &= \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) \Big|_a^\infty \\ &= \frac{1}{s} e^{-sa}\end{aligned}$$

Preguntas



Problema 2

Resuelva el siguiente problema de valor inicial

$$x'' - 4x' + 4x = (t - 1)e^{2t}$$

$$x(0) = 0$$

$$x'(0) = 1$$

$$[5a - 1]$$

$$[5 - 1]$$

$$\mathcal{L}(x'')$$

$$= s^2 \mathcal{L}(x) - s \cdot 0 - 1$$

$$\mathcal{L}(e^{2t} (t-1))$$

$$= \mathcal{L}(e^{2t} - t e^{2t})$$

$$= \frac{1}{(s-2)^2} - \frac{1}{(s-2)}$$

Paso 1: Calculemos algunas TL

$$\mathcal{L}(x') = s\mathcal{L}(x) - x(0) = s\mathcal{L}(x)$$

$$\mathcal{L}(x'') = s^2\mathcal{L}(x) - sx(0) - x'(0) = s^2\mathcal{L}(x) - 1$$

$$\mathcal{L}(e^{2t}(t-1))(s) = \mathcal{L}(t-1)(s-2)$$

$$= \mathcal{L}(t)(s-2) - \mathcal{L}(1)(s-2)$$

$$= \frac{1}{(s-2)^2} - \frac{1}{s-2}$$

Paso 2: Usemos TL en la ecuación

$$\mathcal{L}(x'') - 4\mathcal{L}(x') + 4\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}((t-1)e^{2t})$$

Reemplazando las TL calculadas

$$\underbrace{s^2 \mathcal{L}(x)} - \underbrace{1} - \underbrace{4s \mathcal{L}(x)} + \underbrace{4\mathcal{L}(x)} = \underbrace{\frac{1}{(s-2)^2} - \frac{1}{s-2}}$$

↓

$$\underbrace{(s^2 - 4s + 4)} \mathcal{L}(x) = \frac{1}{(s-2)^2} - \frac{1}{s-2} + 1$$

Paso 3: Arreglar los términos

Como $(s^2 - 4s + 4) = (s - 2)^2$

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{(s-2)^4} - \frac{1}{(s-2)^3} + \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$= \frac{1}{3!} \frac{3!}{(s-2)^4} - \frac{1}{2!} \frac{2!}{(s-2)^3} + \frac{1!}{(s-2)^2}$$

$$= \frac{1}{3!} \mathcal{L}(t^3)(s-2) - \frac{1}{2!} \mathcal{L}(t^2)(s-2) + \mathcal{L}(t)(s-2)$$

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L} \left(\frac{1}{3!} t^3 - \frac{1}{2!} t^2 + t \right) (s-2)$$

$$\frac{1}{(s-3)^2} + \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(x) \mathcal{L}^{-1}(s-3) + \mathcal{L}^{-1}(x) \mathcal{L}^{-1}(s-2)$$

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{3t}) + \mathcal{L}^{-1}(e^{2t})$$

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{3t} + e^{2t})$$

$$\frac{1}{(s-3)(s-2)} = \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s-2} \downarrow \downarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{3t}) - \mathcal{L}^{-1}(e^{2t})$$

Escribir solución

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L} \left(e^{2t} \left[\frac{1}{3!} t^3 - \frac{1}{2!} t^2 + t \right] \right)$$

Por unicidad de la TL obtenemos

$$x(t) = e^{2t} \left(\frac{1}{3!} t^3 - \frac{1}{2!} t^2 + t \right)$$

Handwritten notes:

2-1

$$[D_x^3 - 4D_x + 4] x = f(t)$$

$$\Delta^2 = 45 + 4 \left[\frac{0}{2(x)} \right] - \underline{\underline{1-0}}$$

Preguntas



Problema 3

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t$$

$$x'' + 2y' + x = 0$$

$$\underline{x(0) = 0 \quad x'(0) = 0 \quad y(0) = 0}$$

dx , dy

Usando TL

Pasando la transformada de laplace

$$\underline{\mathcal{L}(x')} - \mathcal{L}(y') - \underline{2\mathcal{L}(x)} + 2\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(1 - 2t)$$

$$\mathcal{L}(x'') + 2\mathcal{L}(y') + \mathcal{L}(x) = 0$$

Las condiciones iniciales implican:

$$\mathcal{L}(x') = s\mathcal{L}(x) \quad \mathcal{L}(x'') = s^2\mathcal{L}(x) \quad \mathcal{L}(y') = s\mathcal{L}(y)$$

Ademas tenemos la igualdad

$$\mathcal{L}(1 - 2t) = \mathcal{L}(1) - 2\mathcal{L}(t) = \underline{\frac{1}{s} - 2\frac{1}{s^2}}$$

Reemplazando

$$(s - 2)\mathcal{L}(x) + (2 - s)\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s} - 2\frac{1}{s^2}$$

$$\underline{2s\mathcal{L}(y) + (s^2 + 1)\mathcal{L}(x) = 0}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones primero encontrare $\mathcal{L}(x)$

Despejando $\mathcal{L}(y)$ de la ecuacion de abajo y reemplazandola arriba obtenemos

$$(s - 2) \left(1 + \frac{s^2 + 1}{2s} \right) \mathcal{L}(x) = \frac{1}{s} - 2\frac{1}{s^2}$$

Sumando y factorizando obtenemos

$$(s-5) / \frac{(s+1)}{25}$$

$$= (s-5) \cdot \frac{(s+1)}{25}$$

Despejar

$$(s - 2) \frac{(s + 1)^2}{2s} \mathcal{L}(x) = \frac{1}{s} - 2 \frac{1}{s^2}$$



Despejando $\mathcal{L}(x)$ obtenemos

$$\mathcal{L}(x) = \frac{2s}{(s - 2)(s + 1)^2} \left(\frac{1}{s} - 2 \frac{1}{s^2} \right) = \frac{2}{s(s + 1)^2}$$

Despejando $\mathcal{L}(y)$ obtenemos

$$\mathcal{L}(y) = -\frac{s^2 + 1}{s^2(s + 1)^2} = -\frac{1}{(s + 1)^2} - \frac{1}{s^2(s + 1)^2}$$

Fracciones parciales

Usando fracciones parciales todo se simplifica

$$\mathcal{L}(x) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2}$$
$$\mathcal{L}(y) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2}$$

Recordando

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s} \quad \mathcal{L}(t^2) = \frac{1}{s^2} \quad \mathcal{L}(te^{-t}) = \frac{1}{s+1} \quad \mathcal{L}(t^2e^{-t}) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Reemplazando

Escribir solución

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(2t - 2te^{-t} - 2t^2e^{-t})$$

$$\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(2t - t^2 - 2te^{-t} - 2t^2e^{-t})$$



Por unicidad de TL obtenemos

$$x(t) = 2t - 2te^{-t} - 2t^2e^{-t}$$

$$y(t) = 2t - t^2 - 2te^{-t} - 2t^2e^{-t}$$

$$[D^2 - 4D]x = e^{4x}$$

$$(s^2 - 4s) L(x) = \frac{1}{(s-4)^2}$$

$$L(x) = \frac{1}{s(s-4)^2} + \frac{a}{s} + \frac{b}{s(s-4)}$$

$$L(a \cdot 1) = \frac{a}{s}$$

$$\frac{b}{s(s-4)} = \frac{b}{4} \frac{1}{s-4} - \frac{b}{4} \frac{1}{s}$$

$$L\left(\frac{b}{s(s-4)}\right) = L\left(\frac{b}{4} \frac{1}{s-4} - \frac{b}{4} \frac{1}{s}\right)$$

$$H + P$$

$$H: f'' - 4f' = 0 \rightarrow C^4 x + C$$

$$f' - 4f + C =$$

$$f' = 4f + C$$

$$\boxed{e^{4x} f(x)}$$

$$\hookrightarrow (s^2 - 4s) \mathcal{L}(x) = \frac{1}{(s-4)^2}$$

$$Z(s) \int_0^\infty Z(t) dt = f(s)$$

$$\mathcal{L}(Z(t-a)) = \int_0^\infty Z(t-a)e^{-st} dt$$

$$= e^{-sa}$$

$$f(s) = 0$$

$$X' + X = Z(t-2)$$

$$(s+1)\mathcal{L}(x) = e^{-2s}$$

$$\frac{e^{-2s}}{s+1}$$

$$\mathcal{L}(x) = \frac{e^{-2s}}{s+1} = e^{-2} \cdot C$$

$$-2(s+1) = -2s-2$$

$$\frac{e^{-2(s+1)}}{s+1} \cdot e^x = f(x)$$

$$e^x \mathcal{L}(u(t-2)) \quad (s-1)$$

$$e^x \mathcal{L}(e^t u(t-2)) = f_x$$

$$X = e^{t+2} u(t-2)$$

Preguntas



Problema 4

Encuentre una expresion para la solucion general de

$$y'' + \frac{y'}{e^{at}} - \left(a^2 + \frac{a}{e^{at}} \right) y = 0$$

Paso 1: Encontrar una particular

Probemos con e^{at}

$$a^2 e^{at} + \frac{ae^{at}}{e^{at}} - \left(a^2 + \frac{a}{e^{at}}\right) e^{at} = 0$$

Por lo que cumple la EDO, por ende es solución particular

Para encontrar otra sol particular, usaremos la formula de abel

Paso 3: Formula de abel

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{y_1^2} dt$$

$$y_2 = e^{at} \int \frac{e^{-\int e^{-at} dt}}{e^{2at}} dt$$

$$y_2 = e^{at} \int \frac{e^{\frac{1}{a} e^{-at}}}{e^{2at}} dt$$

Con el cambio de variable $z = e^{-at}$ obtenemos

Paso 4: Desarrollo integral

$$y_2 = \frac{1}{z} \int \frac{e^{\frac{z}{a}}}{-a} z dz$$

$$y_2 = -\frac{1}{az} \left(aze^{\frac{z}{a}} - a^2 e^{\frac{z}{a}} \right)$$

$$y_2 = -e^{\frac{z}{a}} + \frac{a}{z} e^{\frac{z}{a}}$$

Volviendo a la variable original

$$y_2 = -e^{\frac{1}{a}e^{-at}} + ae^{at} e^{\frac{1}{a}e^{-at}}$$

Paso 5: Escribir sol general

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y = c_1 e^{at} + c_2 \left(-e^{\frac{1}{a}} e^{-at} + a e^{at} e^{\frac{1}{a}} e^{-at} \right)$$

Ejercicios propuestos

