Presentación

Ayudante: Camilo Andrés Lagos Vasquez

Problema 1

$$\text{Resuelva: } \ddot{x} = -\omega^2 x + e^{-t}\cos(\omega t)$$

Paso 1: Resolver homogénea

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

Notemos lo siguiente

$$x = A\cos(\omega t) \qquad\qquad x = B\sin(\omega t)$$

$$\rightarrow x'' = -\omega^2 A\cos(\omega t) \qquad\qquad \rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 B\sin(\omega t)$$

$$\boxed{\longrightarrow x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)}$$

Paso 2: Encontrar sol particular

Digamos que $y = C(t)\sin(\omega t)$ es solucion particular a la EDO

Por conveniencia, digamos que $\ddot{C} = 0$

$$\dot{y} = \dot{C}\sin(\omega t) + \omega C\cos(\omega t) \rightarrow \ddot{y} = 2\dot{C}\omega\cos(\omega t) - \omega^2 C\sin(\omega t)$$

Paso 3: Imponer condiciones

$$\ddot{y} = \cancel{-\omega^2} y + e^{-t}\cancel{\cos(\omega t)} = 2\dot{C}\omega\cancel{\cos(\omega t)} - \cancel{\omega^2 C\sin(\omega t)}$$

Reemplazando y , dividiendo por $\cos(\omega t)$ y reordenando obtenemos

$$\dot{C} = \frac{1}{2\omega}e^{-t}$$

Integre y escogi la siguiente solucion de C

$$\boxed{C = -\frac{1}{2\omega}e^{-t}} \rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2\omega}e^{-t}\sin(\omega t)}$$

Paso 4: Escribir solución general

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) - \frac{1}{2\omega}e^{-t}\sin(\omega t)$$

$x(0) = a \quad x'(0) = b$

Si se dan condiciones iniciales, hay que despejar A y B

Preguntas

Problema 2

Encuentre la solucion general de $\dot{x} = ax + F(t)$

Paso 1: Solución homogénea

$$\boxed{\dot{x} = ax}$$

La solucion general es: $x = Ae^{at}$

Comprobar : $\dot{x} = aAe^{at} = ax$

Paso 2: solución particular

$$\text{Sea } y = C(t)e^{at} \text{ solucion de la EDO}$$

$$\longrightarrow y' = C'e^{at} + \cancel{aCe^{at}} = \cancel{ay} + F(t) = \cancel{aCe^{at}} + F(t)$$

$$\longrightarrow C' = F(t)e^{-at}$$

$$\longrightarrow C(t) = \int F(t)e^{-at}dt$$

$$\longrightarrow y(t) = e^{at}\int F(t)e^{-at}dt$$

e^{at}

Paso 3: Escribir sol general

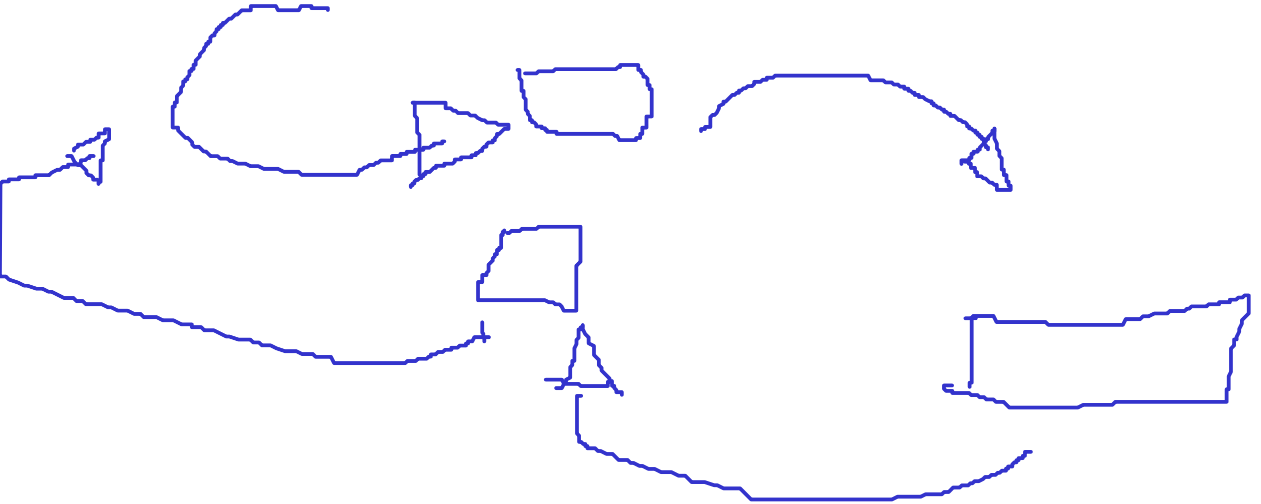
$$x(t) = Ae^{at} + e^{at}\int F(t)e^{-at}dt$$

Si nos dan condicion inicial, hay que resolver la integral y despejar A

Preguntas

Problema 3

Resuelva $\dfrac{dP}{dt} = aP + bP^2$



Paso 1

Definamos la funcion $z(t)$ como

$$z(t) = \frac{1}{P(t)} \rightarrow z' = -\frac{1}{P^2}P'$$

Si dividimos la edo por $-P^2$ obtenemos

$$-\frac{1}{P^2}\frac{dP}{dt} = -a\frac{1}{P} - b$$

Paso 2

Reemplazando z y z' obtenemos

$$\boxed{z' = -az - b}$$

$X' = aX + F$

Utilizando lo visto en el problema 2 obtenemos

$$z(t) = Ae^{-at} - e^{-at}\int be^{at}dt$$

$$= Ae^{-at} - \frac{b}{a}$$

$z' = -\alpha A e^{-\alpha t}$

Paso 3

Recordando la definicion de z

$$P(t) = \frac{1}{z(t)}$$

Reemplazando la solucion general de z

$$\boxed{P(t) = \frac{1}{Ae^{-at} - \frac{b}{a}}}$$

Dudas

Bonus

Resuelva: $$\frac{dy}{dx} = -\frac{6xy - 2y^2 + y^2xe^{yx}}{3x^2 - 4xy + x^2ye^{yx}}$$

Paso 1: Escribir forma diferencial

Multiplicando y reordenando obtenemos la siguiente forma de la ecuacion

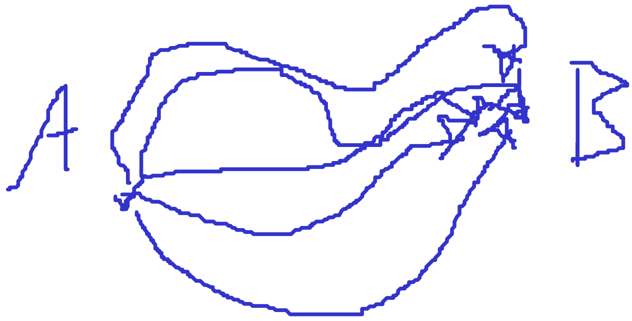
$$\frac{dy}{dx}\left(3x^2 - 4xy + x^2ye^{yx}\right) + 6xy - 2y^2 + y^2xe^{yx} = 0$$

"Multiplicando" por el "dx" obtenemos la forma diferencial

$$\left(3x^2 - 4xy + x^2ye^{yx}\right)dy + \left(6xy - 2y^2 + y^2xe^{yx}\right)dx = 0$$

$\underline{\underline{U(x,y)}}$

$$dU(x,y) = \partial_x U\,dx + \partial_y U\,dy$$



$$\partial_y \partial_x U = \partial_x \partial_y U$$

Paso 2: Diferencial exacta

Para comprobar si es una diferencial exacta, calculamos las parciales cruzadas

$$\partial_x \left(3x^2 - 4xy + x^2 y e^{yx}\right) = 6x - 4y + 2xye^{yx} + x^2y^2e^{xy}$$

$$\partial_y \left(6xy - 2y^2 + y^2 x e^{yx}\right) = 6x - 4y + 2xye^{yx} + y^2x^2e^{yx}$$

Como son iguales, el sistema tiene una diferencial exacta asociada

dU

Paso 3: Escoger un lado

$$\left(3x^2 - 4xy + x^2 y e^{yx}\right) dy + \underbrace{\left(6xy - 2y^2 + y^2 x e^{yx}\right)}_{= \partial_x U} dx = dU(x,y)$$

$3X^2 = 10$

Voy a integrar la seccion con el dy

$-4X = 4\,10$

$$U(x,y) = \int \left(3x^2 - 4xy + x^2 y e^{yx}\right) dy$$

$$= 3x^2 y - 2xy^2 + x^2 \int y e^{yx} dy$$

$$= 3x^2 y - 2xy^2 + (yx - 1)e^{yx} + f(x)$$

$$u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{yx}\,dx \rightarrow v = \frac{1}{y} e^{yx}$$

$$\frac{x}{y} e^{yx} - \frac{1}{y} \int e^{yx}\,dx$$

$$\boxed{\frac{x e^{yx}}{y} - \frac{1}{y^2} e^{yx}}$$

$$(yx - 1)e^{yx} = y e^{yx} + (y^2 x - y) e^{yx}$$

$$= y^2 x e^{yx}$$

Paso 4: Igualar al otro lado

Como tenemos U, podemos calcular

$\partial_x U$ e igualar al termino del dx

$$\partial_x \left(3x^2y - 2xy^2 + \boxed{(yx-1)e^{yx}} + f(x)\right) = 6xy - 2y^2 + y^2xe^{yx}$$

Calculando la derivada obtenemos finalmente

$$\boxed{\frac{df}{dx} = 0} \longrightarrow f(x) = C_0$$

$$dU(x, y) = 0$$

$$\hookrightarrow C_1 = U(x, y)$$

Paso 5: Escribir resultado

$C_0 - C_1 = C$

$$C_1 = U(x,y) = 3x^2y - 2xy^2 + (yx-1)e^{yx} + C_0$$

Reescribiendo e igualando a 0 obtenemos

$$\boxed{3x^2y - 2xy^2 + (yx-1)e^{yx} + C = 0}$$

$$\boxed{y^2 + e^x\,dx + x\,y\,dy = 0}$$

$\partial_y y = 1$

$\partial_x x = 1$

$$\boxed{\tfrac{1}{2}x = n_1}$$

$\tfrac{1}{y} = n_2$

$\boxed{1.}$

$\boxed{2.}$ $\omega = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dx$

$\sigma = nf\,dx + ng\,dx$

$+ \partial_y n f + n\,\partial_y f$

$= g\,\partial_x n + n\,\partial_x g$

$f\,\partial_y n + g\,\partial_x n + n[\partial_y f - \partial_x g] = 0$

$$y\dot{\eta} = (2xy - 2y + 1)\eta$$

$$\dot{\eta} = \cancel{|(x}\,)\eta$$

$$+\dot{\eta} = \cancel{\ \ }\,)\eta$$

$$\boxed{y^2\,dx + xy\,dy = 0}$$

$$\eta y^2\,dx + \eta xy\,dy = 0$$

$$\boxed{\eta(x)}$$

$$2y\eta = y(\eta + x\dot{\eta})$$

$$y\eta = x\dot{\eta}$$

$$\dot{x} = \frac{y}{x} x$$

$x(y)$

$$\dot{x} y^2 + 2yx = xy$$

$$\dot{x} y^2 = -yx$$

$$\Rightarrow \dot{x} = -\frac{1}{y} x$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}$$

$$\ln|x| = c - \ln|y|$$

$$\boxed{M(x) = \frac{A}{y}}$$

$$y^{3}\,dx + x\,i\,dy = 0$$

Ejercicios propuestos