

Presentación



Ayudante: Camilo Andrés Lagos Vasquez

Problema 1

Resuelva: $\ddot{x} = -\omega^2 x + e^{-t} \cos(\omega t)$

$$G.N.H = G.H + P.N.H$$

Paso 1: Resolver homogénea

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

Notemos lo siguiente

$$x = A \cos(\omega t)$$

$$\rightarrow x'' = -\omega^2 A \cos(\omega t)$$

$$x = B \sin(\omega t)$$

$$\rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 B \sin(\omega t)$$

$$\rightarrow x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

Paso 2: Encontrar sol particular

Digamos que $y = \underline{C(t)} \sin(\omega t)$ es solución particular a la EDO

Por conveniencia, digamos que $\ddot{C} = 0$

$$\dot{y} = \dot{C} \sin(\omega t) + \omega C \cos(\omega t) \rightarrow \ddot{y} = 2\dot{C}\omega \cos(\omega t) - \omega^2 C \sin(\omega t)$$

Paso 3: Imponer condiciones

$$\ddot{y} = -\omega^2 y + e^{-t} \cos(\omega t) = \underline{2\dot{C}\omega \cos(\omega t) - \omega^2 C \sin(\omega t)}$$

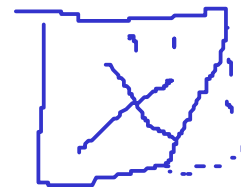
Reemplazando y , dividiendo por $\cos(\omega t)$ y reordenando obtenemos

$$\dot{C} = \frac{1}{2\omega} e^{-t}$$

Integre y escogi la siguiente solución de C

$$C = -\frac{1}{2\omega} e^{-t} \rightarrow y = -\frac{1}{2\omega} e^{-t} \sin(\omega t)$$

Paso 4: Escribir solución general



$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) - \frac{1}{2\omega} e^{-t} \sin(\omega t)$$

Si se dan condiciones iniciales, hay que despejar A y B

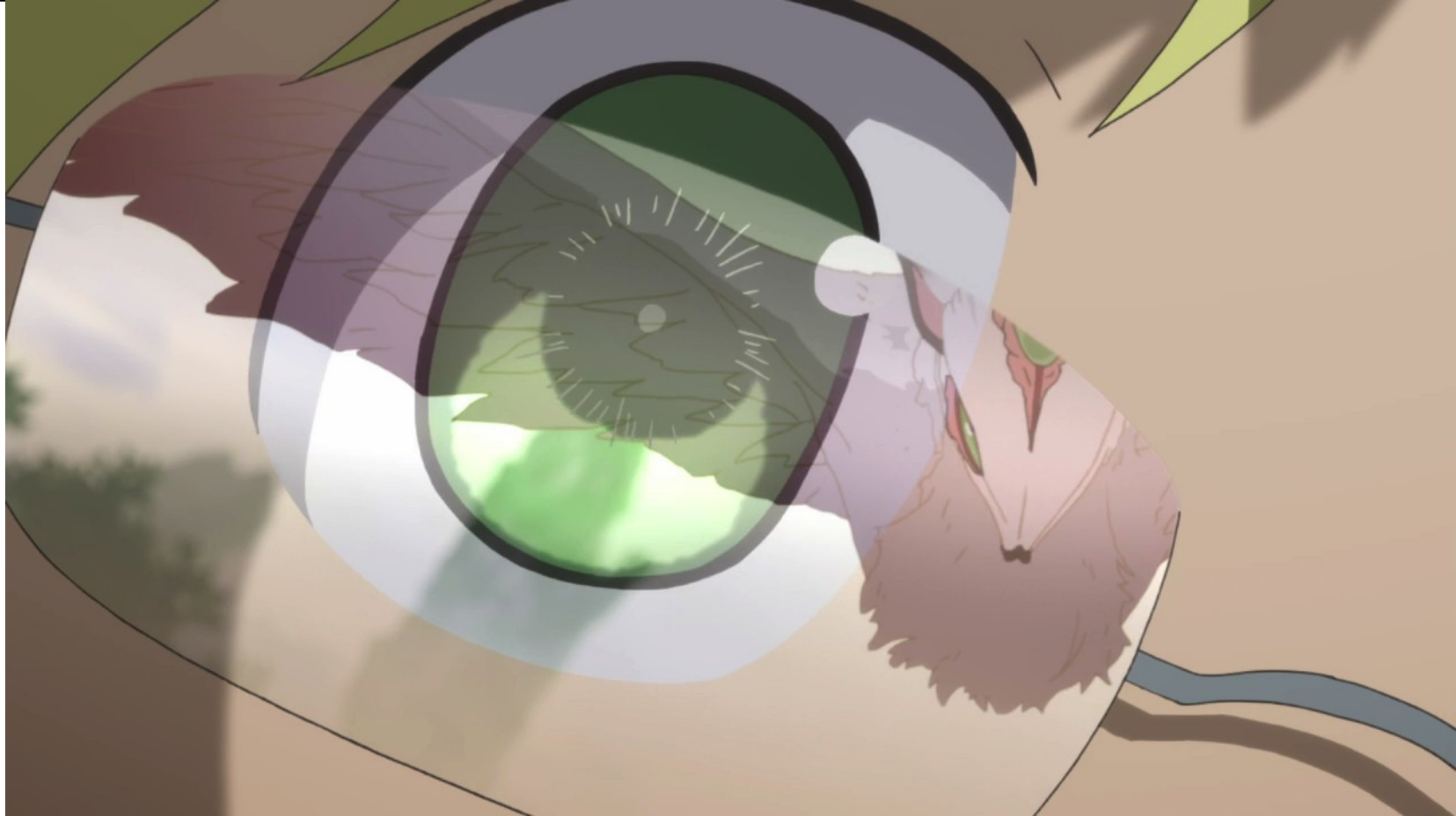
$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x'(0) &= x'_0 \end{aligned}$$

~~$x(0) = x_0$~~

$x_0 = A$

~~$x'_0 = \omega B - \frac{1}{2}$~~

Preguntas



Problema 2

Analice el diagrama de fases del problema anterior

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) - \frac{1}{2\omega} e^{-t} \sin(\omega t)$$

Paso 1: Determinar constantes

Derivando y evaluando en 0 se obtiene

$$x(0) = x_0 = \underline{A}$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = \underline{\omega B - \frac{1}{2}}$$



$$A = x_0$$

$$B = \frac{\dot{x}_0 + 0,5}{\omega}$$

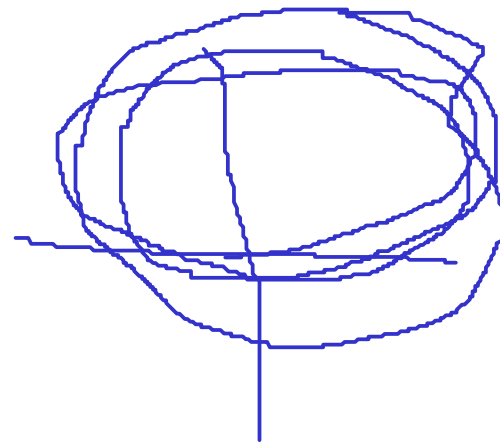
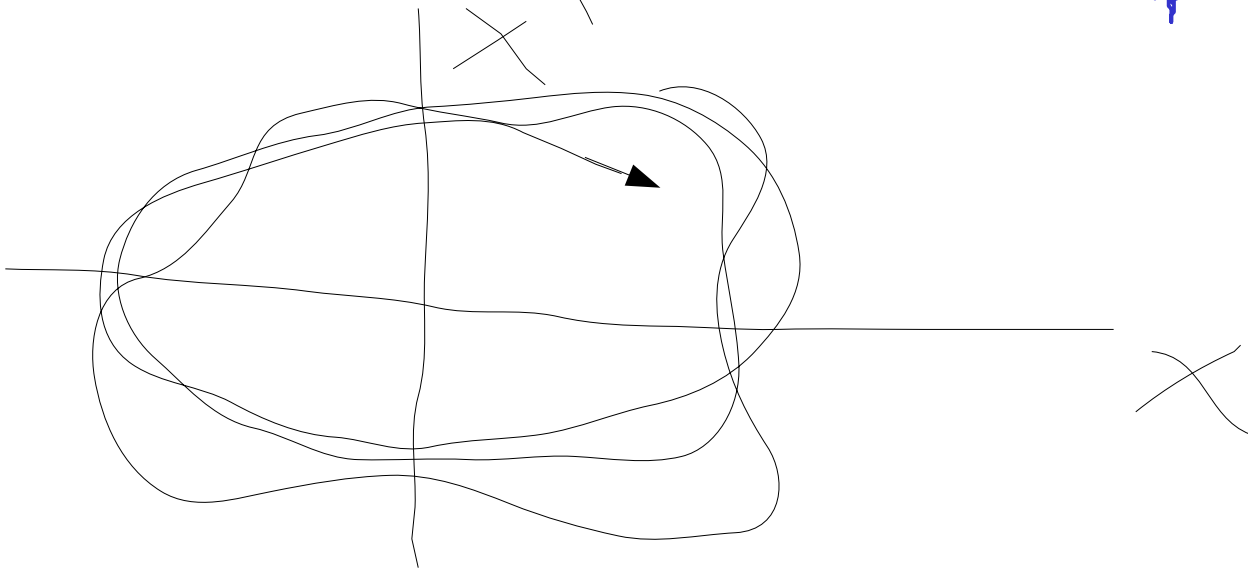
Por lo que las soluciones quedan:

$$x = x_0 \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) - \frac{1}{2\omega} e^{-t} \sin(\omega t)$$

$$\dot{x} = -x_0 \omega \sin(\omega t) + B \omega \cos(\omega t) + \frac{1}{2\omega} e^{-t} \sin(\omega t) - \frac{1}{2} e^{-t} \cos(\omega t)$$

Paso 2: Escribirlo como matriz

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ \underline{-\omega \sin(\omega t)} & \underline{\omega \cos(\omega t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \frac{\dot{x}_0 + 0,5}{\omega} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2\omega} e^{-t} \sin(\omega t) \\ \frac{1}{2} e^{-t} \cos(\omega t) - \frac{1}{2\omega} e^{-t} \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$



Dudas



Problema 3

Encuentre la solución general de

$$\dot{x} = ax + F(t)$$

Paso 1: Solución homogénea

$$\dot{x} = ax$$

La solución general es: $x = Ae^{at}$

Comprobar : $\dot{x} = aAe^{at} = ax$

Paso 2: solución particular

†

Sea $y = C(t)e^{at}$ solución de la EDO

$$\rightarrow y' = C'e^{at} + aCe^{at} = ay + F(t) = aCe^{at} + F(t)$$

$$\rightarrow C' = F(t)e^{-at}$$

$$\rightarrow C(t) = \int F(t)e^{-at} dt$$

$$\rightarrow y(t) = e^{at} \int F(t)e^{-at} dt$$

Handwritten notes:

$$C'e^{at} + aCe^{at}$$
$$=$$
$$aCe^{at} + F(t)e^{at}$$

$$G.N.H = \underbrace{G.H} + \overbrace{P.N.H}$$

$$\underbrace{a(x)} + \underbrace{F(x)} = y'$$

$$a(x) + F(x) = y'$$

Paso 3: Escribir sol general

$$x(t) = Ae^{at} + e^{at} \int F(t)e^{-at} dt$$

Si nos dan condicion inicial, hay que resolver la integral y despejar A

Preguntas



Ejercicios propuestos

