Presentación

Ayudante: Camilo Andrés Lagos Vasquez

Problema 1

Ejemplo cambio de variable

Resuelva $\dfrac{dy}{dx} = y + \dfrac{1}{y}$

Paso 1: Multiplicar

$$y\frac{dy}{dx} = y^2 + 1$$

$$\text{Sea } Y = y^2 \longrightarrow \frac{dY}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{2}\frac{dY}{dx} = Y + 1 \longrightarrow \frac{dY}{dx} = 2Y + 2$$

Paso 2: Escribir solución

$$Y = Ce^{2x} - 1$$

Como $Y = y^2$, una solucion al problema es:

$$y(x) = \sqrt{Ce^{2x} - 1}$$

Preguntas

Problema 2

2. Sea $A \in M(n)$ tal que $A = -A^{-1}$. Determine la solución del sistema $x' = Ax$. **(1 punto)**

$$A^0 = I$$
$$A^1 = A$$
$$A^2 = -I$$
$$A^3 = -A$$
$$A^4 = I$$
$$A^5 = A$$

Paso 1: Escribir exponencial

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} (-1)^n I + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n A$$

$$e^{At} = I\cos(t) + A\sin(t)$$

Siendo esta la solucion al sistema

Dudas

Problema 3

4. Determine la solución del sistema diferencial

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x - 9y\\ \frac{dy}{dt} &= x + 8y\end{aligned}$$

con condición inicial $x(0) = (1, 1)$.

Paso 1: Valores propios

$$\left|\begin{pmatrix} 2-\lambda & -9 \\ 1 & 8-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \longrightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$$

$$\lambda_1 = 5 \qquad \text{multiplicidad } 2$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow v_1 = -3v_2$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Valor propio}$$

Paso 2: Calcular el otro vector

$$QJQ^{-1} = A \leftrightarrow QJ = AQ$$

$$\begin{pmatrix} -3 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

Multiplicando

$$\begin{pmatrix} -15 & 5a-3 \\ 5 & 5b+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 2a-9b \\ 5 & 8b+a \end{pmatrix}$$

Despejando entradas $\longrightarrow a = 1 - 3b$

Paso 3: Escoger un vector

$$\begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Escribiendo la solucion:

$$x(t) = x(0)e^{\begin{pmatrix} 2t & -9t \\ 1t & 8t \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 5t & t \\ 0 & 5t \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} x(0)$$

$$\longrightarrow x(t) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{5t} & te^{5t} \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} x(0)$$

Preguntas

Ejercicios propuestos